PRACE MONOGRAFICZNE Z DYDAKTYKI MATEMATYKI

WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

9

WYDAWNICTWO
NAUKOWE
UAM

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU

WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Prace monograficzne z dydaktyki matematyki

Redaktor naukowy
Edyta Juskowiak

9

WYDAWNICTWO NAUKOWE

POZNAŃ 2023

Recenzenci:
dr Edyta Juskowiak, prof. UAM, Poznań
dr hab. Henryk Kąkol, prof. UP, Kraków
dr hab. Maria Korcz, prof. WWS SE, Środa Wlkp.
dr Marta Pytlak, UR, Rzeszów
dr hab. Ewa Swoboda, prof. PWST, Jarosław
dr hab. Anna K. Żeromska, prof. AGH, Kraków

Publikacja sfinansowana przez Wydział Matematyki i Informatyki UAM
w Poznaniu

Opracowanie graficzne okładki: K. & S. Szurpit
Redaktor: Ewa Kapyszewska
Redaktor techniczny: Dorota Borowiak
Łamanie komputerowe: Eugeniusz Strykowski

ISBN 978-83-232-4212-3 (Print)
ISBN 978-83-232-4213-0 (PDF)
DOI: 10.14746/amup.9788323242130

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIWERSYTETU IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
61-701 POZNAŃ, UL. FREDRY 10
www.press.amu.edu.pl
Sekretariat: tel. 61 829 46 46, faks 61 829 46 47, e-mail: wydnauk@amu.edu.pl
Dział Promocji i Sprzedaży: tel. 61 829 46 40, e-mail: press@amu.edu.pl
Wydanie I. Ark. wyd. 10,0. Ark. druk. 11,50
DRUK I OPRAWA: VOLUMINA.PL SP. Z O.O., SZCZECIN, UL. KS. WITOLDA 7-9

Spis treści

Część 1
– ESEJE

ROZWAŻANIA O BADANIACH DYDAKTYCZNYCH I O NAUCZANIU MATEMATYKI

Sesja wspomnieniowa poświęcona Profesorowi Bogdanowi J. Noweckiemu

W dniach 7.09.2022–10.09.2022 roku odbyła się w Oświęcimiu jubileuszowa ogólnopolska konferencja XXX Szkoła Dydaktyki Matematyki, organizowana przez Instytut Informatyki Małopolskiej Uczelni Państwowej im. rtm. Witolda Pileckiego w Oświęcimiu i Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu. Przebiegała ona pod hasłem *Kształcenie matematyczne wobec wyzwań współczesnego świata*. W ramach tej konferencji, po uroczystym otwarciu, odbyła się *Sesja wspomnieniowa poświęcona Profesorowi Bogdanowi J. Noweckiemu*, wybitnemu dydaktykowi matematyki, który był inicjatorem i współorganizatorem odbywających się od 1981 roku tzw. Szkół Dydaktyków Matematyki, których nazwa zmieniła się w 2003 roku na Szkoły Dydaktyki Matematyki. Profesor Bogdan J. Nowecki był też kontynuatorem i propagatorem

Bogdan Jan Nowecki
ur. 2 sierpnia 1934 roku w Oleśnicy
zm. 26 listopada 2020 roku w Krakowie

idei dydaktycznych prof. A. Z. Krygowskiej. Sesję poprowadziła dr hab. Anna Katarzyna Żeromska. W sesji oprócz prowadzącej głos zabrali dr Mirosława Sajka, dr Katarzyna Wadoń-Kasprzak, dr Janina Duda i dr hab. Henryk Kąkol. Przedstawiono wybrane aspekty działalności naukowej Profesora Bogdana J. Noweckiego. Na temat działalności naukowej Profesora ukazały się wcześniej artykuły, jeden w 2004 roku w *Dydaktyce matematyki*, *26* (Klakla, 2004), w związku z Jubileuszem 50-lecia pracy naukowej, drugi w 2021 roku w *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, *13* (Sajka, 2021). Natomiast na platformie Forum Dydaktyków Matematyki są *Wspomnienia o profesorze Bogdanie Janie Noweckim* autorstwa dr. Zbigniewa Powązki.

Poniżej przedstawione są wystąpienia dwóch prelegentek, jedno autorstwa dr Katarzyny Wadoń-Kasprzak, drugie – dr Janiny Dudy.

Wybrane aspekty działalności naukowej Profesora Bogdana J. Noweckiego w zakresie dokształcania i doskonalenia nauczycieli matematyki

Janina Duda

Małopolska Uczelnia Państwowa im. Rotmistrza Witolda Pileckiego w Oświęcimiu
janina.duda@mup.edu.pl
ORCID: 0009-0004-4930-650X

Streszczenie

W artykule zostały przedstawione pewne wypowiedzi i myśli Profesora na temat dokształcania i doskonalenia nauczycieli oraz uwagi i przykłady działań dotyczące nauczania matematyki. Autorka dzieli się swoją wiedzą i doświadczeniem, które pozyskała, będąc uczestnikiem zajęć prowadzonych przez Profesora Bogdana Noweckiego w ramach realizowanych przez nią studiów podyplomowych „Nauczanie matematyki w zreformowanej szkole".

Summary

The article presents some of the Professor's statements and thoughts on teacher training and development, as well as comments and examples of activities related to teaching mathematics. The author shares her knowledge and experience, which she gained while participating in classes conducted by Professor Bogdan Nowecki as part of her postgraduate studies "Teaching mathematics in a reformed school".

Profesora Bogdana Noweckiego poznałam w Krakowie w październiku 2000 roku na ówczesnej Akademii Pedagogicznej (aktualnie Uniwersytecie Pedagogicznym) im. Komisji Edukacji Narodowej. Podjęłam wówczas na tej uczelni dwusemestralne studia podyplomowe „Nauczanie matematyki w zreformowanej szkole". Była to druga edycja tych studiów, ponieważ pierwsza odbywała się w roku akademickim 1999/2000. Studia te były objęte grantem ministerialnym, były bezpłatne i cieszyły się bardzo dużym zainteresowaniem nauczycieli matematyki. Zostały uruchomione z inicjatywy i dzięki staraniom Profesora Bogdana Noweckiego, który pełnił wówczas funkcję dyrektora Instytutu Matematyki. Profesor Nowecki był ich kierownikiem, a jednocześnie prowadził w ramach tych studiów dwa przedmioty:

1) Problemy samokształcenia i pracy badawczej nauczyciela,
2) Realizacja zadań szkoły i nauczyciela matematyki związanych z reformą.

W artykule, na podstawie literatury oraz własnych notatek z wykładów prowadzonych przez prof. B. J. Noweckiego, przedstawiam pewne jego wypowiedzi i myśli dotyczące nauczania matematyki, które są związane z kształceniem i dokształcaniem nauczycieli matematyki. Ten zakres tematyczny, jak pisze M. Sajka (2021), był troską i jednym z najważniejszych i najszerzej podejmowanych zakresów tematycznych publikacji Profesora Noweckiego.

O DOKSZTAŁCANIU I DOSKONALENIU NAUCZYCIELI MATEMATYKI

Profesor Nowecki był zwolennikiem dokształcania i doskonalenia nauczycieli matematyki przez doskonalące studia podyplomowe i kontakty nauczyciela z uczelnią wyższą, a nie tylko przez pracę samokształceniową ze wsparciem w kursach, warsztatach i konferencjach szkoleniowych o charakterze metodycznym. Uważał, że te, inne, formy dokształcania są ważne, ale nie są wystarczające. Ubolewał, że „studia podyplomowe doskonalące albo przestały istnieć, albo istnieją w formie szczątkowej, gdyż cały wysiłek ministerstwa i uczelni skierowany jest na studia podyplomowe kwalifikacyjne” (Nowecki, 2010). Dodam, że obecnie sytuacja nie uległa poprawie, a nawet pogorszyła się, ponieważ, jak podkreślono na Forum Jakości 2022 w Warszawie, zorganizowanym przez Polską Komisję Akredytacyjną, już pięć uniwersytetów wycofuje się z kształcenia nauczycieli.

W jednym ze swoich wykładów Profesor Nowecki podkreślił, że „**nauczyciel ma siebie uczyć, jak ma nauczać i proces ten powinien trwać przez cały okres aktywności zawodowej**”. Zwrócił uwagę, że żadne studia, nawet studia podyplomowe doskonalące, nie kończą tego procesu. Można to robić przez: a) kształcenie, w tym samokształcenie, b) uczenie się przez gromadzenie i rekonstrukcję doświadczenia, c) doradztwo, instruowanie, mentorstwo, konsultacje, d) aktywność nauczycielską, w szczególności aktywność w poszukiwaniu nowych form uczenia, e) badania naukowe, f) doskonalenie przez demokrację i meliorację stosunków międzyludzkich.

Szczególnie mocno zaakcentował kwestię podejmowania przez nauczycieli badań dydaktycznych, w tym naukowych, które mogą dostarczyć im wielu cennych informacji i wpłynąć pozytywnie na prowadzony przez nich proces nauczania. Badania te mogą dotyczyć zarówno błędów popełnianych przez uczniów podczas rozwiązywania zadań, jak i różnych strategii rozwiązywania zadań, w tym zadań nietypowych. Analiza prac uczniów nad zadaniami nietypowymi będzie związana z badaniem ich postaw i zachowań specyficznych dla aktywności matematycznej, a zatem będzie dotyczyć drugiego poziomu celów matematycznego kształcenia, które wyróżnia prof. Z. Krygowska (1986). Może to być na przykład:

- aktywna postawa wobec problemów matematycznych,
- formułowanie i dostrzeganie problemów w sytuacjach otwartych,
- umiejętność posługiwania się różnymi strategiami podczas rozwiązywania zadań,
- aktywna postawa w poszukiwaniu dowodu,
- pewne rozumienie sensu definicji i aktywna postawa w toku jej poszukiwania,
- pewien poziom wyobraźni przestrzennej zorganizowanej geometrycznie.

Profesor Nowecki podał przykład takiego nietypowego zadania dla uczniów, którzy nie znają metod rozwiązywania równań kwadratowych:

$$\text{Rozwiąż równanie } (x-1)x = 3$$

Chciałabym zaznaczyć, że prowadząc badania do swojej rozprawy doktorskiej *Twórczość matematyczna uczniów uzdolnionych inspirowana wykorzystaniem kalkulatora graficznego*, wszystkie zadania, które rozwiązywali uczniowie, miały charakter zadań nietypowych, zadań-problemów, zadań otwartych, zadań wykraczających poza wiedzę i umiejętności uczniów, ale specjalnie dobranych pod kątem możliwości zastosowania kalkulatora graficznego. Podaję przykład jednego z zadań (2009):

Zadanie 1. Rozwiąż równanie $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 24$. Możesz wykorzystać kalkulator graficzny.

Po rozwiązaniu takiego zadania uczniowie byli też zachęcani do formułowania własnego problemu. Zadanie to pełniło zatem rolę zadania tworzącego w „metodzie problemów tworzących" E. Wittmanna, o której pisze prof. A. Krygowska w *Zarysie dydaktyki matematyki* (1977c), chociaż nie było zadaniem typowym.

Profesor Nowecki zwrócił nam też uwagę na znaczenie, jakie może mieć przykład w trakcie rozwiązywania zadań-problemów i zachęcał do zapoznania się z artykułem dr Marianny Ciosek *O roli przykładów w badaniu matematycznym* (1995). Autorka wymieniła tu:

- Zrozumienie problemu,
- Odkrycie ogólnego rozwiązania problemu,

– Weryfikacja hipotezy odnoszącej się do rozwiązania ogólnego,
– Sprawdzenie poprawności rachunku algebraicznego.

Bardzo wymowna i głęboka jest też wypowiedź Profesora Noweckiego: „**Im łatwiejsze jest uczenie matematyki dla nauczyciela, tym matematyka jest trudniejsza dla jego uczniów i odwrotnie**". Tę wypowiedź należy rozumieć w ten sposób, że im więcej wysiłku i zaangażowania nauczyciel włoży w przygotowanie, organizację i przeprowadzenie lekcji matematyki, tym matematyka stanie się łatwiejsza dla uczniów, a włożony trud będzie opłacalny.

Powinniśmy też pamiętać o tym, że uczymy przedmiotu trudnego dla większości uczniów ze względu na abstrakcyjność pojęć (wytworów umysłowych), specyficzne (dedukcyjne) rozumowania odnoszące się do tych abstrakcyjnych wytworów i specyficzny język werbalno-symboliczny. Konieczne jest „zatem stałe poszukiwanie form, metod i środków nauczania, pozwalających te trudności pokonywać (nie omijać ich, ani nawet łagodzić, ale właśnie pokonywać!)" (2001), aby pomóc uczniom zrozumieć lub dogłębniej zrozumieć nauczane treści i przeprowadzane rozumowania. Profesor Nowecki podał wówczas między innymi przykład zasady indukcji matematycznej i trudności w zrozumieniu przez uczniów jej treści oraz wynikającego z niej schematu postępowania stosowanego przy dowodzeniu twierdzeń. Zasada była wówczas w podstawie programowej z matematyki dla zakresu rozszerzonego w liceum ogólnokształcącym. Profesor zwrócił uwagę na propozycję dydaktyczną prof. A. Z. Krygowskiej zamieszczoną w *Zarysie dydaktyki matematyki* (1977a). Zastosowana metoda została nazwana przez autorkę „legalizacją intuicji". Wychodzi się od nieskończonego ciągu stacji telekomunikacyjnych, zbudowanych zgodnie z prawem przekazywania sygnałów (tzn. jeśli jakaś stacja o numerze n nada sygnał W, to nada go stacja o numerze $n + 1$, czyli bezpośrednio następująca po niej) i zakłada, że jakaś stacja o numerze p nadaje sygnał, co oznacza się przez $W(p)$. Stąd można wnosić, że sygnały nadadzą wszystkie stacje o numerach większych lub równych p. Odpowiedni zapis, przejście na ciąg liczb naturalnych (liczba naturalna zamiast stacji) i pewne twierdzenie W o liczbach naturalnych wprowadza zasadę indukcji matematycznej w taki sposób, że jest ona bardziej zrozumiała dla uczniów. Po przeczytaniu tej propozycji dydaktycznej opracowałam scenariusz lekcji wraz ze scenariuszem prezentacji w programie PowerPoint. Zadanie miałam o tyle ułatwione, że na przedmiocie „techniczne środki dydaktyczne w procesie nauczania matematyki", prowadzonym przez dr. hab. Henryka Kąkola, zgłębialiśmy tajniki tworzenia prezentacji. Napisałam też artykuł metodyczny *Wprowadzenie zasady indukcji matematycznej z wykorzystaniem prezentacji w programie PowerPoint*, który ukazał się w czasopiśmie *Matematyka i Komputery* (2001). Nadmienię, że w programie szkoły średniej zasada indukcji matematycznej już nie występuje, a ja tę prezentację wykorzystuję na zajęciach ze studentami.

Następnym omawianym zagadnieniem było wdrożenie uczniów do umiejętnego czytania tekstów matematycznych. Należy ich tego uczyć, ponieważ tekst matematyczny różni się zasadniczo od innych tekstów i uczniowie mogą mieć z tym trudności.

Profesor niejednokrotnie podkreślał to, żeby nauczanie matematyki było rozwijaniem aktywności matematycznych, a nie przekazywaniem wiedzy. Powołał się wówczas na wypowiedź belgijskiego profesora, znanego matematyka i dydaktyka matematyki Willy'ego Serwaisa, eksperta Komisji ds. Nauczania Matematyki UNESCO i sekretarza Międzynarodowej Komisji ds. Studiowania i Doskonalenia Nauczania Matematyki (CIEAEM): „**W matematyce mniej ważne jest to, co się wie, niż to, co się umie robić**". Oznacza to, jak wyjaśniał Profesor Nowecki, że podstawowe znaczenie ma rozumienie i umiejętność definiowania, formułowania twierdzeń, ich dowodzenia, algorytmizowanie, matematyzowanie, uogólnianie, czyli ujawnianie i rozwijanie wszystkich aktywności charakterystycznych dla twórczości matematycznej, a mniej ważna jest znajomość definicji, twierdzeń, dowodów i algorytmów. Te aktywności pozwalają na działania twórcze w dziedzinie matematyki już nawet na poziomie szkoły podstawowej. Przykładowo

> uczeń zamiast **poznawać** twierdzenie Pitagorasa, ma je **odkryć**, a rolą nauczyciela jest stworzenie (zorganizowanie) takiej sytuacji problemowej, w której ten proces twórczy może się odbyć. Od poziomu ucznia i inwencji nauczyciela zależy dobór tej sytuacji problemowej w taki sposób, aby uczeń wykonał zadania z powodzeniem, poczuł się odkrywcą i przeżył należną mu satysfakcję z osiągniętego sukcesu. Uczeń będzie zatem „**tworzył własną matematykę**". (Nowecki, 2010)

Profesor Nowecki nazwał ten proces **„wyzwalaniem matematyki własnej ucznia"** (2010). Podkreślał, że idee procesu nauczania i uczenia się matematyki oraz roli aktywności ucznia w tym procesie propagowała już w latach siedemdziesiątych prof. A. Z. Krygowska (o uznanym autorytecie światowym, od 1975 roku Honorowa Przewodnicząca CIEAEM), zatem głoszone w latach 90. „nowe idee" odejścia od nauczania polegającego na przekazywaniu wiedzy na rzecz organizowania procesu budowania przez ucznia własnej wiedzy nie są nowe. Zdaniem Profesora idee głoszone przez prof. Krygowską i dotyczące rozwijania dydaktyki matematyki są ponadczasowe i na miarę XXI wieku. Odwoływał się do określeń nauczania i uczenia się matematyki podanych przez prof. Krygowską w *Zarysie dydaktyki matematyki* (1977b):

> Nauczanie matematyki to ze strony nauczyciela **organizowanie aktywnego i świadomego procesu uczenia się matematyki przez ucznia**, kierowanie jego prawidłowym przebiegiem i kontrolowanie jego wyników.

> W koncepcji, którą tu przedstawiamy, **uczenie się matematyki jest zorganizowaną aktywnością**, obejmującą: przejmowanie i asymilowanie informacji otrzymanych z różnych źródeł, bezpośrednie wykorzystywanie tych informacji do:
> - rozwiązywania standardowych zadań mających charakter ćwiczebny,
> - samodzielnego zdobywania informacji,
> - tworzenie subiektywnie nowych dla uczącego się elementów wiedzy, subiektywnie nowych pojęć, twierdzeń i metod w toku rozwiązywania problemów sformułowanych przez innych lub samego uczącego się. (s. 14)

Profesor Nowecki objaśnia (2010), że nauczanie matematyki zgodnie z koncepcją prof. A. Z. Krygowskiej powinno polegać zatem na stałej dbałości nauczyciela o aktywizowanie ucznia i prowadzenie zajęć w taki sposób, aby był on zainteresowany omawianymi treściami. Aktywność ucznia w procesie nauczania-uczenia się matematyki jest warunkiem niezbędnym do osiągnięcia sukcesu przez każdego ucznia, na miarę jego możliwości. Podkreślę, że prof. Krygowska przyjęła „zasadę aktywnego i świadomego udziału ucznia w procesie nauczania" (jedną z ogólnych zasad teorii pedagogicznej) jako **zasadę przewodnią dydaktyki matematyki** (1977a, s. 2).

PODSUMOWANIE

Jako uczestnicy studiów podyplomowych byliśmy zachęcani przez Profesora Bogdana Noweckiego do organizowania procesu nauczania z uwzględnianiem aktywności matematycznej uczniów, do monitorowania i rejestrowania popełnianych przez nich błędów w celu refleksji i poszukiwania sposobów naprawczych, do zwracania uwagi na samodzielność ich pracy na lekcji, na dawanie im szansy na własne pomysły rozwiązywania zadań, a także stwarzanie możliwości podejmowania aktywności twórczej. Byliśmy również motywowani do rozwijania własnego warsztatu pracy z wykorzystaniem różnych, w tym nowoczesnych środków dydaktycznych i zachęcani do korzystania z publikacji prof. A. Z. Krygowskiej *Zarys dydaktyki matematyki* jako kompendium wiedzy z dydaktyki matematyki i źródła inspiracji do organizowania procesu tworzenia własnej matematyki przez ucznia.

BIBLIOGRAFIA

Ciosek, M. (1995). O roli przykładów w badaniu matematycznym. *Dydaktyka Matematyki*, *17*, 5–85

Duda, J. (2009). Twórczość matematyczna uczniów uzdolnionych a kalkulator graficzny (fragment badań). *Annales Of The Polish Mathematical Society*, seria 5: *Didactica Mathematicae*, *32*, 43–92.

Duda, J. (2002). Wprowadzenie zasady indukcji matematycznej z wykorzystaniem prezentacji w programie PowerPoint. *Matematyka i Komputery*, *9*.

Klakla, M. (2004). Sylwetka Jubilata. *Dydaktyka Matematyki*, *26*, 7–10.

Krygowska, Z. (1977a). *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1 (s. 146–152). Warszawa: WSiP

Krygowska, Z. (1977b). *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 2 (s. 2–14). Warszawa: WSiP.

Krygowska, Z. (1977c). *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 3 (s. 102–105). Warszawa: WSiP.

Krygowska, A. Z. (1986). Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich. *Dydaktyka Matematyki*, *6*, 25–41.

Nowecki, B. J. (2010). O dydaktyce matematyki i kształceniu nauczycieli. W: Z. P. Kruszewski (red.), *Studia z dydaktyki matematyki* (s. 53–67). Płock: Wydawnictwo Naukowe Novum.

Nowecki, B. J. (1984). Co to znaczy uczyć nowocześnie. *Oświata i Wychowanie*. *Wersja B*, *7*, 14–16.

Nowecki B. J. (2001). *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki*, cz. 2: *Prace prof. dr. hab. Bogdana J. Noweckiego* (s. 41–47). Płock: Wydawnictwo Naukowe Novum.

Nowecki, B. J. (2005). Perspektywiczne idee Profesor Anny Zofii Krygowskiej odnoszące się do dydaktyki i nauczania matematyki oraz kształcenia nauczycieli. *Dydaktyka Matematyki*, *28*, 103–113.

Sajka, M. (2021). Sesja wspomnieniowa poświęcona śp. Profesorowi Bogdanowi J. Noweckiemu. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, *13*, 185–197.

Platforma Forum Dydaktyków Matematyki, http://fdm.matematykadlawszystkich.pl/edukacja/

Problematyka badawcza prac doktorskich wykonanych pod kierunkiem Profesora Bogdana Noweckiego

Katarzyna Wadoń-Kasprzak

Małopolska Uczelnia Państwowa im. Rotmistrza Witolda Pileckiego w Oświęcimiu
katarzyna.wadon-kasprzak@mup.edu.pl
ORCID: 0000-0002-8366-7630

Streszczenie

W trakcie XXX jubileuszowej Szkoły Dydaktyki Matematyki, której hasłem było *Kształcenie matematyczne wobec wyzwań współczesnego świata*, odbyła się sesja wspomnieniowa poświęcona prof. Bogdanowi Noweckiemu. Sesję tę poprowadziła **dr hab. Anna Żeromska, prof. AGH**, która została członkinią Komitetu Naukowego XXX Szkoły Dydaktyki Matematyki, a jednocześnie wchodzi w skład Komisji Dydaktyki Komitetu Matematyki Polskiej Akademii Nauk. W trakcie sesji głos zabrali również: dr Mirosława Sajka, dr Janina Duda, dr Katarzyna Wadoń-Kasprzak oraz dr hab. Henryk Kąkol, prof. UP.

Summary

During the 30th jubilee School of Mathematics Education, whose main theme was Mathematical education in the face of the challenges of the modern world, a memorial session was held devoted to prof. Bogdan Nowecki. The session was chaired by dr hab. Anna Żeromska, prof. AGH, which became a member of the Scientific Committee of the 30th School of Didactics of Mathematics. During the session, the following spoke also: dr Mirosława Sajka, dr Janina Duda, dr Katarzyna Wadoń-Kasprzak and dr hab. Henryk Kąkol, prof. UP.

Z Profesorem Bogdanem Noweckim miałam możliwość zetknąć się jako uczestniczka Ogólnopolskiego Seminarium im. Prof. Anny Zofii Krygowskiej z Dydaktyki Matematyki. Problematyka badawcza, którą zajmował się Profesor Nowecki, to między innymi rozumienie pojęć matematycznych na różnych poziomach matematycznego kształcenia. Na seminarium referowałam wówczas poszczególne etapy przyszłej pracy doktorskiej, dotyczącej rozumienia pojęć matematycznych na różnych poziomach matematycznego kształcenia. Udział w tym seminarium dostarczył mi wiele cennych wskazówek związanych z metodologią przeprowadzenia badań oraz podejmowaną przeze mnie problematyką badawczą.

KIERUNKI PROBLEMATYKI BADAWCZEJ PRAC DOKTORSKICH PISANYCH POD KIERUNKIEM PROFESOR A. Z. KRYGOWSKIEJ ORAZ PROFESORA B. J. NOWECKIEGO

Problematyka badawcza dydaktyki matematyki formułowana przez prof. A. Z. Krygowską znalazła odzwierciedlenie w pracach doktorskich pisanych pod kierunkiem Pani Profesor, jak również – w późniejszym czasie – w pracach pisanych pod kierunkiem doktorów, których wypromowała. Prof. A. Z. Krygowska promowała dwudziestu dwóch doktorów nauk matematycznych w zakresie dydaktyki tych nauk. W problematyce badawczej prac doktorskich wykonanych pod kierunkiem Profesor A. Z. Krygowskiej można wyróżnić dwa główne kierunki:

- Psycho-matematyczne problemy dotyczące uczenia się matematyki (trudności uczniów i analiza ich przyczyn, strategie rozwiązywania matematycznych problemów, rola intuicji i formalizmu, uzdolnienia matematyczne i ich ocena itp.);
- Metodyka uczenia się i nauczania matematyki (propozycje dydaktyczne realizacji pewnych działów matematyki szkolnej, nowoczesne środki i metody uczenia się i nauczania matematyki, zastosowanie tekstu matematycznego w nauczaniu, problem indywidualizacji nauczania, problem oceny i kontroli wyników nauczania itp.) (Nowecki, 1990).

Profesor Bogdan Nowecki wypromował dziewięciu doktorów na podstawie badań z zakresu dydaktyki matematyki. W *Zeszycie Specjalnym*, dedykowanym prof. B. Noweckiemu z okazji jubileuszu 70-lecia urodzin oraz 50-lecia pracy naukowej, w jednym z artykułów autorstwa dr hab. A. Żeromskiej zapoznać się można z wykazem prac doktorskich przeprowadzonych pod kierunkiem Pana Profesora (Żeromska, 2004). Był on dla mnie podstawą do analizy kierunków w problematyce badawczej tych prac. Dwa kierunki prac prowadzonych pod kierunkiem Profesora B. J. Noweckiego są zbieżne ze wspomnianymi powyżej kierunkami wyróżnionymi w pracach promowanych przez profesor A. Z. Krygowską. Ponadto w pracach doktorskich promowanych przez Profesora B. J. Noweckiego można wyróżnić jeszcze trzeci kierunek dotyczący kształcenia nauczycieli matematyki.

Pierwszy kierunek problematyki badawczej prac – psycho-matematyczne problemy dotyczące uczenia się matematyki

Do prac doktorskich pisanych pod kierunkiem prof. A. Z. Krygowskiej, realizujących pierwszy z kierunków problematyki badawczej, prof. B. Nowecki zaliczył, dokonując analizy tych prac, następujące: *Rysunek i znak graficzny w nauczaniu matematyki* (1968) – praca autorstwa Stefana Turnaua, *Pojęcie dowodu i dowodzenia w nauczaniu szkolnym* (1969) – praca autorstwa Bogdana Noweckiego, *Sposoby kontroli rozumienia pojęć matematycznych w procesie dydaktycznym* (1972) – praca autorstwa Zygfryda Dyrszlaga, *Naturalne i formalne rozumienie przez uczniów funktorów zdaniotwórczych i kwantyfikatorów w nauczaniu matematyki* (1973) – praca autorstwa Heleny Siwek, *Dydaktyczne problemy związane ze strategiami stosowanymi w rozwiązywaniu zadań matematycznych* (1976) – praca autorstwa Marianny Ciosek, *Pewne problemy percepcji definicji matematycznej przez uczniów szkoły średniej* – praca autorstwa Zofii Zamorskiej, *Problemy rozpoznawania uzdolnień matematycznych uczniów* (1979) – praca autorstwa Macieja Klakli, *Aktywności matematyczne jako kryterium doboru zadań w nauczaniu matematyki* (1981) – praca autorstwa Wernera Mnicha, *Pewne dydaktyczne problemy związane z interwencją nauczyciela w toku rozwiązywania matematycznych zadań przez uczniów* (1981) – praca autorstwa Antoniego Pardały.

Do powyższego wykazu realizującego moim zdaniem pierwszy z kierunków badań, a zatem *psycho-matematyczne problemy dotyczące uczenia się matematyki*, dołączyć można następujące prace doktorskie pisane pod kierunkiem prof. B. J. Noweckiego: *Postawy uczniów klasy czwartej szkoły podstawowej wobec zadań matematycznych* (WSP, 1984) – praca autorstwa Marii Legutko oraz *Wybrane cele nauczania matematyki a proces rozwiązywania zadań* (AP, 2001) – praca autorstwa Anny Katarzyny Żeromskiej.

Drugi kierunek problematyki badawczej prac – metodyka uczenia się i nauczania matematyki

Do prac doktorskich pisanych pod kierunkiem prof. A. Z. Krygowskiej realizujących drugi z kierunków problematyki badawczej prof. B. Nowecki zaliczył, dokonując analizy tych prac, następujące: *Wprowadzenie elementów probabilistyki w polskiej szkole średniej* (1969) – praca autorstwa Tadeusza Sawickiego, *Programowanie pracy samodzielnej studentów I roku matematyki na przykładzie ćwiczeń z analizy matematycznej* (1972) – praca autorstwa Gustawa Trelińskiego, *Organizowanie samodzielnego przygotowania studenta I roku do ćwiczeń* *z matematyki na kierunku budowy maszyn politechniki* (1972) – praca autorstwa Zofii Kowalewskiej, *Dedukcja lokalna w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej* (1973) – praca autorstwa Jana Koniora, *Elementarne pojęcia topologiczne w nauczaniu na poziomie średnim* (1976) – praca autorstwa Ireny Gucewicz-Sawickiej, *Teksty sterujące pracą ucznia w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej* (1977) – praca autorstwa Maria Sznajder, *Rola algorytmów i organigramów w nauczaniu matematyki* (1977) – praca autorstwa Tadeusza Ramsa, *Teksty sterujące jako środek podnoszenia efektywności czytania tekstu matematycznego* (1980) – praca autorstwa Marii Korcz, *Rola gier i zabaw matematycznych lub paramatematycznych w nauczaniu matematyki w szkole podstawowej* (1981) – praca autorstwa Jana Filipa, *Zainteresowania matematyczne dzieci i młodzieży a zajęcia pozalekcyjne z matematyki* (1983) – praca autorstwa Gustawa Studnickiego, *Pewne problemy związane z kontrolą w nauczaniu matematyki* (1984) – praca autorstwa Małgorzaty Ćwik, *Wyniki nauczania matematyki uczniów szkół podstawowych w latach 1974–1975 i niektóre czynniki mające wpływ na poziom tych wyników* (1984) – praca autorstwa Józefa Korpikiewicza, *Charakterystyka błędów popełnionych przez uczniów w stosowaniu tożsamości algebraicznych na przykładzie wzorów skróconego mnożenia* (1986) – praca autorstwa Kazimiery Skałuby. Do powyższego wykazu realizującego drugi z kierunków badań, a zatem *Metodyka uczenia się i nauczania matematyki*, dołączyć można moim zdaniem następujące prace doktorskie pisane pod kierunkiem prof. B. J. Noweckiego: *Elementy statystyki w nauczaniu szkolnym* (WSP, 1982) – praca autorstwa Henryka Ruszczyka, *Rola podręcznika szkolnego w procesie aktywnego nauczania i uczenia się matematyki na przykładzie podręczników do klasy czwartej szkoły dziesięcioletniej* (WSP, 1983) – praca autorstwa Józefa Grochulskiego, *Aktywizująca rola technicznych środków dydaktycznych w procesie nauczania-uczenia się matematyki w pierwszej klasie ponadpodstawowej* (WSP, 1983) – praca autorstwa Weroniki Jaśkiewicz, *Pojęcie liczby naturalnej w rozumieniu dzieci rozpoczynających naukę szkolną* (WSP, 1987) – praca autorstwa Aleksandry Urbańskiej oraz *Rola zadań i problemów w kształtowaniu pojęć matematycznych na przykładzie pojęcia bezwzględnej wartości liczby rzeczywistej* (UP, 2006) – praca autorstwa Joanny Major.

Trzeci kierunek problematyki badawczej prac – kształcenie nauczycieli matematyki

Troska o rozwój kadry dydaktyków matematyki przyświecała prof. A. Z. Krygowskiej od zarania jej naukowej działalności (Nowecki, 1984). Katedra Dydaktyki Matematyki utworzona w Wyższej Szkole Pedagogicznej podjęła różne formy pracy nad rozwojem kadry dydaktyków matematyki, m.in. organizując Ogólnopolskie Seminarium z Dydaktyki Matematyki, przeznaczone dla pracowników Katedry i nauczycieli zainteresowanych dydaktyką matematyki, które prowadzone było do 2014 roku. Do prac doktorskich pisanych pod kierunkiem prof. J. B. Noweckiego, realizujących trzeci z kierunków problematyki badawczej dotyczący kształcenia nauczycieli matematyki, można zaliczyć moim zdaniem następujące: *Specyficzne problemy kształcenia matematycznego studentów kierunków: nauczanie początkowe i wychowanie przedszkolne* (WSP, 1985) – praca autorstwa Elżbiety Urbańskiej oraz *Rola prac magisterskich z dydaktyki matematyki w przygotowaniu nauczycieli matematyki w świetle analizy prac wykonanych w IM UAM* (AP, 2001) – praca autorstwa Stanisława Machowskiego.

PODSUMOWANIE

Jako podsumowanie artykułu warto powtórzyć słowa prof. B. J. Noweckiego przytoczone przez prof. Ryszarda Pawlaka w artykule *Dojrzałość matematyczna. Trudności i przeszkody w posługiwaniu się matematyką*:

> U źródeł współczesnej dydaktyki matematyki legły dwa zasadnicze czynniki; z jednej strony praktyczne potrzeby szkoły i nauczyciela matematyki […], z drugiej – konieczność transponowania na grunt szkolny, a co za tym idzie do szerokich warstw społeczeństwa aktualnych historycznie idei matematycznych. (Pawlak, 2004)

BIBLIOGRAFIA

Nowecki, B. J. (1984). *Krakowska szkoła dydaktyków matematyki*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe WSP.

Nowecki, B. J. (1990). Problematyka badawcza prac doktorskich wykonanych pod kierunkiem Prof. A. Z. Krygowskiej. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, seria 5: *Dydaktyka Matematyki*, *12*, 45–54.

Żeromska, A. (2004). Wykaz prac doktorskich przeprowadzonych pod kierunkiem Prof. dr. hab. Bogdana J. Noweckiego. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, seria 5: *Dydaktyka Matematyki*, *26*, 29–33.

Pawlak, R. (2004). Dojrzałość matematyczna. Trudności i przeszkody w posługiwaniu się matematyką. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, seria 5: *Dydaktyka Matematyki*, *26*, 289–311.

Jak uczyłem pół wieku temu, ćwierć wieku temu i jak uczę teraz…

Michał Szurek

emerytowany profesor Uniwersytetu Warszawskiego
szczurek.michal@gmail.com

Streszczenie

Autor publikacji opisuje swoje wrażenia na temat zmian w relacjach nauczyciel - uczeń przez 50 lat. Wszystko opiera się na doświadczeniu autora w nauczaniu zarówno w polskich szkołach średnich, jak i na uniwersytetach w Polsce, Kanadzie, USA i Niemczech. Ponadto autor omawia coraz większą rolę, ogólnie rzecz biorąc, IT w nauczaniu, w szczególności CAS, podając przykłady i odpowiedzi oraz sugerując nowy styl nauczania.

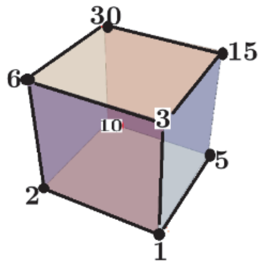
Abstract

The title of the present article is self-explanatory: *How I taught a half century ago, a quarter century ago and how I teach now*. The author desrcibes his impressions on the changes of the relations teacher-student over 50 years. Everything is based on author's experience in teaching both in Polish high schools and universities in Poland, Canada, USA and Germany. Moreover, the author discusses the increasing role of, generally speaking, IT in teaching, in particular of CAS, giving examples and answers, and suggesting a new style of teaching.

Liczba 30 jest największą liczbą naturalną, taką, że każda
liczba $n > 1$, mniejsza od niej i względnie pierwsza z nią, jest liczbą pierwszą.

O CZYM BĘDZIE

Tytuł referatu mówi sam za siebie. Daje też pewną wskazówkę co do wieku autora. Cóż, urodziłem się jeszcze w dziewiętnastej półsetce lat minionego tysiąclecia. Wiek, w którym się znalazłem – mam teraz na myśli liczbę lat, a nie stulecie – ma wiele zalet. Jedną z nich jest w miarę powszechnie akceptowana zasada, że taka osoba może sobie gawędzić, trzymając się tematu mniej więcej sinusoidalnie. Skorzystam z tego prawa.



Rysunek 1. Zbiór dzielników liczby 30 jako wierzchołki sześcianu

Chciałbym poświęcić to wystąpienie mojemu nauczycielowi matematyki z XLI Liceum imienia Joachima Lelewela w Warszawie inżynierowi Wacławowi Chyrze. Po latach dowiedziałem się, że był bohaterem Powstania Warszawskiego, dowódcą plutonu w 11 kompanii batalionu Dzik walczącego na Starówce. Przeżył przypadkiem.

Wacław Chyra (1909–1970) na moim zdjęciu maturalnym

Dlaczego zabieram głos?

Swoje wystąpienia na forum nauczycielskim zaczynam często od wyjaśnień, *dlaczego* przyznaję sobie prawo do wypowiadania się publicznie. Tu wyjaśnienie etymologiczne: *profesor* to nie ktoś, kto robi wszystko profesjonalnie (chociaż oczywiście powinien), tylko ktoś, kto ma prawo do głoszenia swoich tez publicznie. Nie tylko nauczać (od tego są docenci – *doceo* – uczę, *docendo discimus* – ucząc, uczmy się).

Wśród osób zajmujących się oświatą i administrowaniem jest bardzo wiele osób, które traktują resort jako odskocznię od kariery politycznej do zarabiania dużych pieniędzy, delektowania się władzą i wyżywaniem się w indoktrynacji. Co więcej, każda nowa ekipa bardzo reformuje poletko edukacyjne, zawsze pod hasłem: „nasi poprzednicy zababrali, od teraz będzie lepiej". Tak było, drodzy Czytelnicy, zawsze od… 1918 roku. Tak będzie i teraz.

Jest jeszcze jedna, charakterystyczna, grupa osób działających na niwie oświatowej. To inteligentni mężczyźni i inteligentne kobiety, mądrzy/mądre, z tytułami akademickimi… i mający o szkole bardzo teoretyczne wyobrażenie (ostatni kontakt ze szkołą mieli na wywiadówkach własnych dzieci) i chcących działać według „najnowszych trendów". Powiedzmy sobie, *nie zawsze* prowadzi to do pewnych przegięć i „zwycięstwa idei nad zdrowym rozsądkiem". Nie zawsze.

Całe swoje życie zawodowe spędziłem na Uniwersytecie Warszawskim plus liczne wyjazdy naukowe. Ale uczyłem też w liceach warszawskich, przez pół roku nawet w szkole podstawowej, miałem zajęcia dla zwykłych studentów na uniwersytetach niemieckich, kanadyjskich i amerykańskich. Od kilkunastu lat uczę studentów na ich pierwszym semestrze na wydziałach, gdzie matematyka jest nierzadko tak zwanym michałkiem. Mam zatem świetny ogląd bardzo niedawnych absolwentów. Rejestruję, co umieją. Z moich obserwacji powstałby znakomity doktorat. Szkoda, że już zdobyłem ten tytuł wcześniej.

Ale najbardziej ważkim powodem, dla którego ośmielam się mówić o nauczaniu, jest dom rodzinny, owa kindersztuba. Rodzice przeszli całą ścieżkę: ojciec od nauczyciela w wiejskiej szkole na Podlasiu w latach trzydziestych XX wieku przez kolejne stopnie i funkcje do profesora szkoły wyższej (emerytura 1977). Ojciec był zresztą autorem pierwszego po 1945 roku doktoratu z dydaktyki matematyki *Przyczyny niepowodzeń uczniów klas jedenastych w rozwiązywaniu zadań matematycznych* (Uniwersytet Warszawski, 1961, promotor: Wincenty Okoń). Mama przeszła podobną drogę: od Podlasia przez pracę w szkołach podstawowych, potem studia i praca w centralnej administracji szkolnej. Ale i to za mało. Rodzice byli „nasiąknięci" szkołą, o szkole mówiło się w domu zawsze, nawet na spotkaniach imieninowych. W bliższej i dalszej rodzinie było i jest bardzo wiele nauczycieli i nauczycielek (tych drugich więcej) i tak dalej, ale nie będę przecież wciągał Czytelnika w swoje sprawy rodzinne. Tylko wniosek: nigdy nie traktowałem nauczania jako przykrego dodatku to pracy naukowej (jak to jest powszechne w środowisku naukowym), a można powiedzieć, że wprost przeciwnie. Dużą rolę w moim nastawieniu do spraw edukacji odegrała książka Elżbiety Jackiewiczowej *Wczorajsza młodość*, pierwsze wydanie z 1955 roku. Opowieść o młodej nauczycielce wchodzącej w życie zawodowe. Mimo swojego roku wydania, książka była niewiele nasączona indoktrynacją tamtych czasów. Napisana była z zaangażowaniem i egzaltacją – przy niej *Ania z Zielonego Wzgórza* to nudna, sucha i bezbarwna opowieść.

Powiem też, że (w odróżnieniu od bardzo wielu zawodowych dydaktyków) nie uważam, żebym miał monopol na głoszenie prawdy. Nie. Mam swoje poglądy, mocno ugruntowane, ale może inni mają też inne, równie pożyteczne. Przywołam tu przykład z turystyki tatrzańskiej. Z Kuźnic na Halę Gąsienicową można iść przez Boczań albo przez Jaworzynkę. Każda z tych dróg zajmie tyle samo czasu. Są zwolennicy jednej i drugiej. Jednego tylko nie można: iść trochę tędy, a trochę tamtędy.

Z pewnego poglądu się nie wycofam. To pewność, że nauczyciele są tą grupą zawodową, która wnosi najwięcej do PKB, krajowego produktu brutto. Z tą różnicą, że efekty ich pracy (Państwa pracy, drodzy Czytelnicy) nie widać od razu, a po 30 latach. Nauczyciel jest jak leśnik.

Jeszcze lepszym porównaniem jest, że nauczyciel jest jak wielbłąd. Proszę się nie obrażać. Nie, nie dlatego, że mu/jej garb rośnie. Rzecz jest bardziej subtelna. Jak głosi bardzo stare zadanie, pewien Arab zapisał swoim synom w testamencie stado wielbłądów. Najstarszy syn miał dostać połowę stada, średni jedną trzecią, a najmłodszy jedną dziewiątą. Zauważmy przy okazji, że najmłodsi synowie zawsze mieli pod górkę, ale to nie należy do zadania. Okazało się, że stado liczy 17 sztuk. Jak podzielić? Poszli po radę do kadiego. „W porządku, da się zrobić". Poszedł do domu synów ze swoim wielbłądem. Pożyczam go wam. Teraz mamy 18 sztuk i podział łatwy. Najstarszy połowę - 9 sztuk, średni jedną trzecią - 6, a najmłodszy dziewiątą część 18, czyli 2. W sumie mamy 9 + 6 + 2 = 17. Zadanie rozwiązane, zabieram swojego wielbłąda.

Teraz wszyscy rozumiemy, dlaczego nauczyciel jest jak wielbłąd! Bez niego – ani rusz. Z nim - wszystko staje się jasne i proste!

Co, kogo, czemu

Zauważyłem, że w dyskusjach o nauczaniu często obie strony gadają „jak gęś z prosięciem", przy dobrej woli z obu stron. Po pierwsze mogą nie porozumieć się, o jakim etapie nauczania rozmawiają. Moi/moje uczelniani/ane koledzy/

/koleżanki patrzą raczej na liceum, a przecież arcyważne nauczanie początkowe różni się od licealnego bardzo, bardzo znacznie. To dla wszystkich jest zrozumiałe i nie odkrywam żadnej tajemnicy.

Drugim, rzadko uświadamianym sobie przez dyskutantów, pytaniem jest: *kogo* uczymy. Chodzi mi o stosunek tych, których uczymy do matematyki (ogólniej: do nauki i uczenia się). Czy uczymy tych, którzy sami z siebie chcą się uczyć; czy tych, którzy wprawdzie nie pałają entuzjazmem, ale z różnych przyczyn podejdą solidnie do sprawy; czy tych, którzy są *z definicji* negatywnie nastawieni do nauki, a do matematyki w szczególności, dla których pan/i od matematyki będzie zawsze wrogiem.

I jeszcze jedno: najwięcej nagród dostają nauczyciele, którzy kształcą zdolną młodzież, mają olimpijczyków itp. To krzywdzące. Miewałem olimpijczyków. Kierowanie nimi jest łatwe: oni sami garną się do nauki. O wiele ważniejsze jest nauczanie początkowe. Ale urzędnikom jest łatwiej ocenić: pan A ma siedmiu olimpijczyków, pani B sześciu, a zatem pan A jest lepszym nauczycielem.

Narzekania na nauczycieli

Teraz kolejne ogólne, całkiem poważne, refleksje. Ustosunkuję się do kilku typów wypowiedzi. Opinia nr 1. „Tego nie będzie na maturze, więc nie można tego przerabiać na lekcjach, bo to tylko strata czasu”. Opinia nr 2, często spotykana w mediach i wypowiadana nawet przez zawodowych dydaktyków: „nauczyciele uczą tylko pod egzamin, a przecież tak nie można, trzeba całościowo, holistycznie i ogólnorozwojowo!”. Opinia nr 3, popularna w ogólnie pojętym społeczeństwie: „powinniśmy w szkole uczyć tylko tego, co się dzieciom potem przyda w życiu”.

Komentarz: zauważyłem, że teraz nie mówi się „dzieci”, tylko „dzieciaki”. Bardzo mi się to <u>nie</u> podoba.

Co do opinii nr 1. Jest taki sport, który polega na kopaniu piłki. Wyobraźmy sobie piłkarza, który odmawia robienia „pompek” na treningu: „Panie trenerze, przecież tego nie będzie na meczu!”. A mnie przez cały czas nauki (szkoła, studia) towarzyszyło kilka książek o tym, jak się uczyć. Pisane były przez fachowców. Jedną z rad, którą stosowałem: chcesz dobrze dać egzamin z materiału X? Ucz się więcej, przerób półtora X! Jedyną krytyczną uwagą, jaką wygłoszę pod adresem „współczesnej młodzieży”, jest, że nie potrafią się uczyć. Zdaję sobie dobrze sprawę, że na „współczesną młodzież” narzeka się od zawsze – może zresztą *tylko* od 2500 lat…

Co do opinii nr 2. Przepraszam, ale jak mają/mamy uczyć? Szczególnie przed egzaminami, w tym przede wszystkim przed maturą? Zadaniem trenera jest, aby drużyna wygrała mecz. W obecnym systemie egzaminacyjnym od wyniku egzaminu końcowego (w szczególności matury) zależy bardzo wiele, o wiele więcej, niż gdy uczył mnie Wacław Chyra. Ile punktów, taka uczelnia. Poprawianie matury jest możliwe, ale trudne. Ćwiczymy, ćwiczymy i ćwiczymy umiejętności, żeby móc się nimi wykazać na sprawdzianie, zawodach, meczu. Jak pilot Pirx w opowiadaniu Stanisława Lema *Test*. Zapamiętałem cytat: „Mordownia tysięcznych ćwiczeń zrobiła jednak swoje". Chodzi o to, że w stresującej sytuacji pilot i tak automatycznie robi swoje. Chciałbym tu się odnieść do słów wybitnego profesora Stefana Turnaua, wypowiedzianych niedawno (2021) w wywiadzie do dwumiesięcznika zachodniopomorskiego *Refleksje*. Kopiuję:

> Dodam tu uwagę ogólną: w matematyce można czegoś nie wiedzieć, gdy się ma czas na rozumowe znalezienie odpowiedzi. Oczekiwanie natychmiastowej odpowiedzi ucznia na zadane pytanie jest wbrew istocie matematyki.

Nie zgadzam się i ja, a i najwyraźniej układający zadania maturalne. Chyba wszyscy powtarzamy jak mantrę: szkoła ma uczyć myślenia. Na to jest powszechna zgoda. Tyle że diabeł siedzi w szczegółach i chichocze. Na bardzo wiele pytań należy znać natychmiastową odpowiedź. I to nie tylko w matematyce, i to z bardzo praktycznych względów. Jeżeli nie wiemy, ile to jest 6 razy 9, jeżeli nie pamiętamy szczegółów dotyczących twierdzenia Pitagorasa, nie umiemy sprawnie podnieść dwumianu do kwadratu, jeżeli nie wiemy, gdzie jest środek okręgu wpisanego w trójkąt – owszem, dowiemy się tego z internetu, ale stracimy wiele czasu i „sił intelektualnych". Zużyjemy myślenie tam, gdzie już nie powinniśmy myśleć. Nie wiem, kto to powiedział, że z twórczym myśleniem przy rozwiązywaniu problemu jest tak, jak z szarżą kawalerii w bitwie: można jej użyć tylko raz, w precyzyjnie dobranym momencie, po starannym przygotowaniu i przemyśleniu: co będzie dalej.

Pianista ma cały koncert „w palcach", nie tylko w głowie. Wygłoszę może kontrowersyjny pogląd: dobry kierowca to nie ten, który myśli na każdym skrzyżowaniu. Dobry jest ten, który kolejność przejazdu zna bez myślenia, ale wie, w jakiej sytuacji właśnie powinien zacząć myśleć. Ucząc w szkole algorytmów, tracimy wiele, ale i zyskujemy. Myślenie musi być oparte na konkretach. Właśnie na obecnej maturze trzeba rozwiązywać zadania na tempo. Może nie sprintem na kilometr, ale energicznie. Piszący te słowa nie mógłby marzyć o osiągnięciu „maxa". Wszystko proste, ale za mało czasu. Wygłoszę jeszcze jeden kontrowersyjny pogląd: szkoła ma nauczyć automatyzmów. Właśnie automatyzmów i właśnie po to, żeby przy twórczym myśleniu nie tracić czasu i energii na rudymenty. Zysk z takiej wiedzy jest większy niż strata wynikająca z „uczenia się na pamięć". Z uczeniem się na pamięć nie jest tak źle, jak można wyczytać w wielu krytycznych opracowaniach. Przytoczę własny przykład. Nie mogłem „ani w ząb" zrozumieć definicji granicy ciągu. Nauczyłem się jej na pamięć i potem powolutku dochodziłem do tego, co to wszystko znaczy – myślałem i w tramwaju, i na spacerze w lesie. I jak to bywa: nagle wszystko się ułożyło, wskoczyło na swoje miejsce, w minutę zrozumiałem, o co chodzi. Pochwalę się: rozumiem do tej pory!

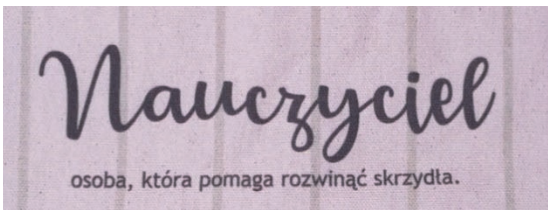
Reasumując, uważam, że uczenie „pod egzamin" jest po prostu racjonalne i zgodne z etosem. Nie jest to sprzeczne z moim zdaniem na temat „opinii nr 1". A nawet jedno z drugim się pokrywa (proszę przemyśleć przykład z pompkami). Z tym jednak, że nauczyciel jest wciąż czymś więcej niż trener kadry w sporcie, zwany zresztą upiornie: selekcjonerem!

Wreszcie opinia nr 3. Nieprzemyślana. Wręcz szkodliwa. Wynikałoby z niej, że już teraz wiemy dokładnie, co się młodzieży w życiu przyda! Tak było w XIX wieku, może i do połowy dwudziestego. Mój dziadek (zmarł w 1920 roku) był szewcem w Gorlicach. Nauczył się fachu od swojego ojca, a ten od swojego.

„Po co mi sinusy, kiedy będę aktorką, tłumaczką, polonistką, geologiem, historykiem, muzykiem, sportowcem, mechanikiem samochodowym, pielęgniarką, bizneswoman?" – co na ten temat odpowiadać? Jedną z nieoczywistych odpowiedzi jest „może ci się przyda, może nie". Musimy uczyć ze znacznym nadmiarem. Wszystko (no, może prawie wszystko) łączy się ze sobą. Widziałem kiedyś film o Banachu – jasne było, że aktor nie miał pojęcia, o czym mówi. Polonista nieznający historii to kiepski polonista. Lepszym mechanikiem samochodowym jest ten, kto trochę rozumie prawa fizyki, a pielęgniarka powinna rozumieć procesy biologiczne. Geograf nie może się mylić w obliczeniach. I tak dalej, i tak dalej, i tak dalej. Ale jeszcze coś bardziej poważnego: ucząc cię, chcemy uczniu/studencie sprawdzić twoje możliwości intelektualne. Jeżeli nie jesteś w stanie nauczyć się prostej matematyki, to może twój potencjał intelektualny nie jest tak wysoki i jest to dla wszystkich pewien sygnał. Nie znaczy to, że jesteś gorszym człowiekiem, nie! Oczywiście zawsze działa argument „nie garb się". Oczywiście można mówić, że matematyka się wszędzie przydaje, że uczy myślenia, że matura i chęć szczera. Że to piękne, że w końcu nie wiadomo, co się w życiu przyda. Trochę działa metoda sprowadzenia do niedorzeczności. Czy w profesjach, które wymieniłem wyżej, będzie ci potrzebne, kto napisał Pana Tadeusza, kto to był król Burburyk, kiedy żyły dinozaury, co to są mitochondria, gdzie leżą Pireneje i co to jest połowa sumy podstaw. Być może 90% wiedzy szkolnej ci się nie przyda. Ale które 10% ci się przyda? Cesarz Austrii Franciszek Józef I zobaczył kiedyś biegnących sportowców. „Dlaczego oni biegną?" – zapytał adiutanta. „Ten pierwszy dostanie puchar!". „Aha, rozumiem, ale w takim razie po co biegną ci pozostali?".

Byliśmy kiedyś przewodnikami naszych uczniów po dobrze znanym nam obszarze. Pokazywaliśmy im góry, jeziora, lasy, uczyliśmy, gdzie są trudności, pułapki i niebezpieczeństwa. Mieliśmy to już „przećwiczone". Teraz mamy ich doprowadzić do celu, którego nie znamy ani my, ani oni, ani w ogóle nikt. Mało tego, teren jest zamglony, a my jesteśmy w nim po raz pierwszy. Często jeszcze znajdujemy na drodze kłody pozostawione chyba celowo, żeby było trudniej. I nauczyciele to robią! Czy ktoś teraz wątpi, że to właśnie nauczyciele dają największy wkład w rozwój społeczeństw?

Jak uczyć w XXI wieku? Oczywiście inaczej. Ale jak? Jak już wspomniałem, komu wydaje się, że wie, ten ma rację! To znaczy *wydaje mu się!* Mamy smartfony, laptopy, tablety i setki aplikacji. Jak znaleźć równowagę? Nie może być tak, jak za króla Ćwieczka, ale na pewno musimy umieć wykopać dołek zwykłą łopatą – nawet jeżeli są koparki. Zmieniła się rola szkoły i nauczyciela. Gdy karierę pedagogiczną zaczynał mój Ojciec, w wiejskiej szkole na Podlasiu, blisko sto lat temu, szkoła była głównym ośrodkiem kultury w promieniu wielu kilometrów, a rolą nauczyciela było przekazywanie wiedzy. Zbyteczne będzie wspominać, jak to się zmieniło. Moja córka (nauczycielka szkoły podstawowej) ma torbę na zakupy z napisem – „Nauczyciel – osoba, która pomaga rozwinąć skrzydła". I to mi się najbardziej podoba. Pomaga. Tylko tyle i aż tyle.



Modele edukacyjne

To, o czym pisałem przed chwilą, wiąże się z ogólnym podejściem do nauczania. Z grubsza rzecz biorąc, mamy dwa modele. Jeden z nich to, umownie rzecz biorąc, tradycyjny europejski, a nawet europejsko-chiński. Drugi to amerykański. W pierwszym wykształcenie ponadpodstawowe jest elitarne. Trudno dostać się do szkół i na uniwersytety. Natomiast zdobycie wykształcenia daje już przepustkę do dobrego życia: stanowiska, pieniądze. Do tej pory mówimy z podziwem: „o, to człowiek z wyższym wykształceniem!".

W modelu amerykańskim jest inaczej. Studia uniwersyteckie służą do potwierdzenia możliwości intelektualnych kandydata. Pozwalają jemu/jej samej rozpoznać siebie. Doktorat? Proszę bardzo. Prawdziwa konkurencja i prawdziwe szkolenie to potem, w firmach. Zdobywanie umiejętności niemożliwych do wytrenowania „w szkole”. Powoli przechodzimy z modelu europejskiego na amerykański. Można myśleć, że to dobrze, można myśleć, że to źle. Dzieje się.

Konieczna jest tu jeszcze jedna uwaga. Każdy z nauczycieli zetknął się z labidzeniem uczniów i ich rodziców: „Po co mi to wszystko?”. Aha, ale na ten temat już się wypowiedziałem.

Wróćmy do myślenia

Psychologowie zastanawiają się, jak to z nim jest. Jak sądzisz, Czytelniku, jaką czynnością jest myślenie? Czy bardziej przypomina malowanie obrazu, czy jazdę na rowerze? Inaczej mówiąc, czy w wyniku myślenia powstaje coś naprawdę nowego, czy tylko zostają ulotne kręgi na wodzie? Czy – jak widział to Sokrates – jest to tylko przypominanie sobie, wyciąganie z głębi umysłu tego, co w nim siedziało zawsze, podobnie jak to było z wywoływaniem zdjęć w dawnych czasach (na naświetlonym papierze w ciemni wyłaniał się z wolna czarno-biały obraz), czy nagle powstaje coś z niczego: „nie wiedziałem, a wiem”? Jak przechodzimy od początkowego „to dla mnie czarna magia” przez „nic nie rozumiem” i „zaczyna świtać”, potem „oj, to chyba zrozumiem”, do „zrozumiałem” i finalnego „ależ to było proste”. Jak to się nam połączyło?

Na pewnych zajęciach z dydaktyki dla nauczycieli rzuciłem pytanie: „po co uczymy matematyki?”. Ku mojemu zaskoczeniu siedzący w pierwszym rzędzie pan powiedział zdziwiony: „jak to, po co? Żeby nauczyć matematyki, tej usługowej nauki dla fizyki!”. Miałem w związku z tym temat do dyskusji na zajęciach. Szkoda miejsca na jej opisywanie. Wszyscy wiedzą, jaka mogła być. Ale jest i druga skrajność: pogląd, że uczymy matematyki, żeby nauczyć myślenia. Spieszę wyjaśnić, że jak najbardziej się z tym zgadzam, tyle że myślenia uczą i szachy, i brydż, i krzyżówki, i Sudoku, i łamigłówki logiczne, i analiza kazusów prawnych, a być może nawet uważne słuchanie przemówień polityków (*być może* – bo staram się nie słuchać). Wiemy, że matematyka uczy myślenia najlepiej, ale dlaczego tak jest? Tego nie umiemy racjonalnie opisać. Może dlatego, że łączy ona nauki humanistyczne ze ścisłymi? Co więcej, jest przecież jedyną humanistyczną nauką ścisłą. Tak jest. To jedyna humanistyczną nauka ścisła. Nikt przecież nie wątpi, że jest nauką ścisłą, a że zajmuje się konstrukcjami naszego, ludzkiego umysłu, jest też głęboko humanistyczna.

Uśmiecham się do wspomnień. Nic nie zastąpi bezpośredniego przeżycia. Wspominam piękną lekcję geometrii, jaką poprowadziła moja nauczycielka Helena Sygnatowicz, gdy byłem w czwartej (!) klasie szkoły podstawowej. Na placu Lelewela (wtedy całkiem dzikim) na warszawskim Żoliborzu wytyczaliśmy w terenie linie proste, trójkąty i kwadraty. Jeszcze pamiętam, jak leżałem na zimnej trawie i krzyczałem do kolegów: „tyczkę bardziej w prawo”. Może dlatego zostałem matematykiem?

Nicolas Bourbaki, Jean Piaget

Nie da się zrozumieć początków mojej kariery dydaktycznej (i kolegów/ /żanek mojego pokolenia) bez wycieczki w historię. Jak wiemy, jest ona nauczycielką życia. Przypomnę, że grupa matematyków francuskich powołała do życia (ok. 1935 roku) Nicolasa Bourbakiego – to znaczy wybrała „go” jako zbiorowy pseudonim. Celem grupy była oparta na nowych zasadach systematyzacja matematyki. Jej gmach miał opierać się na niewielu strukturach (algebraicznych, topologicznych, porządkowych) określonych aksjomatycznie, nad którymi są piętrowo nadbudowane inne, pochodne. Niby nic nowego, ale konsekwentna realizacja tego pomysłu zmieniła całą matematykę, a raczej nie ją samą, tylko sposób jej uprawiania. Ważne stało się to, co najbardziej ogólne. Nastąpił powrót do „formy”, nawet tej w sensie Arystotelesa. Przypomnę w skrócie. Materia – glina – może przybrać różne formy: garnka, figurki, cegły. Materia może być kształtowana, forma zostaje. Pomysł ten i próba jego realizacji wzbudziły na całym świecie wiele dyskusji i kontrowersji wśród matematyków, ale w zasadzie inicjatywa Bourbakiego zyskała aprobatę olbrzymiej większości społeczności matematycznej. Ruch ten zaznaczył się później, w latach 1960–1970, ogromną falą w nauczaniu matematyki. Skupił wokół tego nauczania wielu znanych matematyków, w nienotowanej dotąd skali ożywił środowisko dydaktyków, psychologów, organizatorów oświaty, a nawet polityków. W nauczaniu powszechnym ta „hurrabourbakizacja” wyrządziła wiele szkód. Szkoda że i w Polsce. Zaczęto bowiem utożsamiać nauczanie matematyki z tak ogólnym spojrzeniem na nią, w którym zatracają się indywidualne cechy rozpatrywanych obiektów, a zostaje tylko bardzo generalne rozważania. Dzieci w szkole podstawowej przechodziły skrócony kurs ogólnej teorii mnogości. Owszem, dostosowany do ich możliwości, ale zupełnie niepotrzebny. W wyniku gigantycznych prac koncepcyjnych i organizacyjnych powstały na użytek szkolny projekty znane w angielskim obszarze językowym jako *new mathematics*, zaś pod francuską nazwą jako *mathématique moderne*. Choć ostatecznie reformatorski projekt szkolny pod nazwą „nowa matematyka” został zweryfikowany na jego niekorzyść, wywołał w następnym dziesięcioleciu, tj. w dekadzie 1970–1980, swoistą kontrreformację zwaną eufemistycznie „drugą falą reform”. Fascynacją „nową matematyką” nie uległy jednostki, w tym René Thom (1923–2002) i Hans Freudenthal (1905–1990). A ja powiem swoje zdanie: zastosowanie koncepcji bourbakistowskich w szkole „zamordowało” geometrię, a raczej jej nauczanie. Trzeba jednak być sprawiedliwym, w matematyce, którą tu nazwę „uniwersytecką”, takie podejście pchnęło naszą naukę na nowe tory.

Moja młodość zawodowa

Miałem w życiu szczęście, pod wieloma względami zresztą (na przykład wybór żony). Okres studiów i lata bezpośrednio po nich przypadły na wykładniczy rozwój zapotrzebowania na matematyków, w tym na „numeryków”. Na komputer nie mówiło się już „mózg elektronowy”, tylko „maszyna matematyczna”, ale słowa „informatyka” jeszcze nie było. W tych samych latach doszła do nas „nowa matematyka”. Jak wspomniałem, 90 procent matematyków, ja również, było zachwyconych. „Dzieci zrozumieją podstawy matematyki uniwersyteckiej” wołano. Nie pamiętam, w której klasie szkoły podstawowej przerabiało się skrót wykładu, który na studiach uniwersyteckich nazywa się „wstępem do matematyki”. Chodziło głównie o teorię mnogości: czy przecięcie zbioru lalek ze zbiorem misiów jest niepuste. Modna była metoda „monografii liczby”. „Dzisiaj, dzieci, poznamy liczbę 5. Otwórzcie książki na stronie siedemnastej”. W geometrii nacisk był na jej aksjomatyczny charakter i precyzję definicji. „Kula jest to zbiór punktów w równej odległości od pewnego punktu zwanego środkiem” – mówiły podręczniki nawet do szkół podstawowych. Adresatami były dzieci grające w piłkę od czasu, gdy nauczyły się chodzić. Piszę tak, jakbym się trochę naśmiewał. Nie, nie! Z perspektywy czasu każdy jest mądry. Może: prawie każdy.

Uczyłem geometrii

Najpierw w jednej klasie (I LO), po półroczu dostałem drugą, to znaczy też pierwszą tylko równoległą. Nauczyciel zrezygnował ze względów zdrowotnych. Na pierwszej lekcji wyraziłem się, że punkt leży na prostej. Rozległ się szmerek-śmieszek. Zrozumiałem i poprawiłem się. „Punkt należy do prostej, bo przecież prosta to zbiór punktów”. Dalej szmer… „Poprzedni pan nas nauczył, że to niepoprawnie, bo to wyróżnia jeden z tych obiektów, a one są równoprawne. Należy mówić: punkt i prosta są incydentne”. Inny kolega, zresztą rasowy nauczyciel, opowiadał, że na lekcji udowodnił, że z przyjętych aksjomatów wynika, że odcinek ma środek, ale nie potrafił wykazać, że tylko jeden środek. W domu przemyślał sprawę i całą następną lekcję poświęcił na dowód, że odcinek ma tylko jeden środek. Sądzę, że koloryzował – pół lekcji by wystarczyło.

A zatem pierwsze lata mojego nauczania w szkole były naznaczone bourbakizmem, ścisłością, dowodami, abstrakcją i formalizmem teorii mnogości. Nie pisałem już $1 < x \leq 2$, tylko $x \in (1, 2]$. Analizowałem definicję łamanej i wielościanu, zasadę Archimedesa, rozkładałem izometrię na trzy symetrie i tak dalej.

Wszedł do użytku podręcznik Zofii Krygowskiej. Znam wielu kolegów, którym on się bardzo podobał – z jego logiczną strukturą i wnioskowaniem: z twierdzenia 7.3 wynika 8.2. To właśnie podoba się nam matematykom. Zacytuję znów profesora Turnaua:

Celem jest poprawne rozumowanie

z profesorem Stefanem Turnauem rozmawia Sławomir Iwasiów

Moje zainteresowanie matematyką, a przede wszystkim klasyczną, Euklidesową geometrią, będącą wyzwaniem dla rozumu, ukształtowało się najpierw w rzeszowskim gimnazjum, a potem rozwinęło w krakowskim liceum. Myślę, że przede wszystkim pod wpływem nauczycieli: Władysława Grabarczyka i Marii Kracińskiej. Cenili oni bardziej umiejętność konstruowania wywodu dedukcyjnego niż znajomość faktów i definicji – i to właśnie mi się spodobało.

Tu nasze podejście jest wspólne. Wspomnę moje pierwsze fascynacje rozumowaniem matematycznym. Do tej pory pamiętam euforię (! tak), jaka ogarnęła mnie, gdy zrozumiałem wyprowadzenie zasady indukcji z aksjomatu Zermelo. Blakły przy tym pierwsze wzruszenia dotyczące…, no cóż, o czym to myślą młodzieńcy… Przypomnę wiadomości matematyczne: zbiór liczb naturalnych jest dobrze uporządkowany przez relację mniejszości, a mówiąc najprościej: w każdym (niepustym, rzecz jasna) zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza. Przypomnę także ten dowód. Przypuśćmy, że zasada indukcji nie jest prawdziwa, a zatem, mimo że implikacja $\mathrm{T}(n) \Longrightarrow \mathrm{T}(n+1)$ zawsze zachodzi, to jednak dane twierdzenie nie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n. To znaczy są takie liczby, dla których nie jest prawdziwe. Weźmy najmniejszą z nich, niech nią będzie n. Nie jest nią liczba 1, bo założyliśmy, że $\mathrm{T}(1)$ jest prawdą. Skoro n jest najmniejsza wśród fałszywych, to dla twierdzenia jest prawdziwe. To przeczy implikacji $\mathrm{T}(n-1) \Longrightarrow \mathrm{T}(n)$. Dzisiaj trudno mi zrozumieć, co wtedy mnie aż tak w tym zachwyciło. Pamiętam tylko swoje niemal euforyczne myśli. Mam jeszcze w pamięci dwie–trzy podobne sytuacje; jedna z nich to dowód, że jeżeli ideał pierścienia jest maksymalny, to pierścień ilorazowy jest ciałem. Bardzo prosty – i wykładając algebrę, zatrzymywałem się, aby wrócić do wspomnień i przypomnieć sobie swoje myśli sprzed lat. Jak pisałem, łatwo być mądrym z perspektywy czasu. Matematycy zaakceptowali taki styl nauczania; powiedziałbym, że z pewnej naiwności: Będzie jak dawniej, tylko mądrzej. Matematyka jest piękna, bo taka logiczna. Tyle że było to spojrzenie ze strony katedry uniwersyteckiej. Załamało się w nauczaniu swoiste piękno geometrii – rysunki, konfiguracje stycznych i unoszące się bryły. Zyskując ścisłość, zabiliśmy intuicję.

Kształcenie nauczycieli i mój w nim udział

Osobną i ważniejszą kartą są studia nauczycielskie. W drugiej połowie lat 70. nauczyciele zostali „ustawieni w czwórki" i musieli przemaszerować przez uniwersytet. Muszę tu scharakteryzować myślenie wielu moich kolegów-naukowców. Sam tak kiedyś uważałem. Otóż mianowicie, że nauczyciele są, jak pracownicy uczelni, hobbystami matematyki, dla których nauczanie stanowi tylko część pracy. Niekoniecznie nielubianą, tego nie imputuję. Ale że są to ludzie, którzy na pierwszym miejscu stawiają matematykę i swoje w niej doskonalenie, a nauczanie jest tylko częścią tego wszystkiego. Ważną może na 50 procent, może nawet 60, ale nie więcej.

Chyba z tego wynikał program nauczania na zaocznych studiach nauczycielskich lat siedemdziesiątych. W teorii: pełny program normalnych studiów. Dla ludzi dorosłych, pracujących. Mówiono z zakłamaniem: „nie będziemy was odrywać od pracy". Do tego studia zaoczne. Warszawa obsługiwała Polskę północno-wschodnią. Pamiętam panią Elę z Suwałk: „noc z piątku na sobotę w pociągu, zajęcia do niedzieli, noc z niedzieli na poniedziałek w pociągu". Mój kolega, wychodząc z logicznych przesłanek, powiedział do takich wykończonych nauczycieli: ja uczyłem się 8 godzin dziennie na zwykłych studiach, państwo macie przerobić to samo na zaocznych w weekendy. Musicie być zatem piekielnie zdolni – możemy więc szybciej iść z materiałem. Uczyłem nauczycieli topologii ogólnej i różnicy między ciągiem jednostajnie zbieżnym a punktowo zbieżnym. Moi koledzy wykładali analizę funkcjonalną i teorię miary. Cała para w gwizdek.

Takie są i moje wspomnienia. Streszczając: było to przedłużeniem młodzieńczego zachłyśnięcia się matematyką. Chęć przekazania wszystkiego. Tyle jest w nauce prawdy, ile jest w niej matematyki. Dobrze się to komponowało z entuzjazmem i wiarą, że matematyka jest „sposobem na życie" dla wszystkich. Dla piszącego te słowa była na pewno. Wpasowywało się w ogólny entuzjazm środowiska naukowego. Działało dobrze na… zdolne i chętne dzieci, zainteresowane matematyką. Zniechęcało pozostałe 90 procent. Nieco podobnie było na studiach. Panowała „reguła trzech". To znaczy: zwracamy uwagę na trzech (troje) najlepszych studentów w grupie. Dla reszty nie ma po co się wysilać. Jeszcze wtedy panowała teoria, że studia są przygotowaniem do pracy naukowej, a kto się nie nadaje, tego odsiewamy.

Lata średnie, 1985–2000

Trudne czasy mają też swoje „plusy dodatnie". Powoli zaczynała do wszystkich docierać świadomość, teraz znowu negowana, że wykształcenie zapewni dobrobyt (jak w opisanym wyżej modelu europejskim wykształcenia, wtedy jeszcze stanowiąc fundament wiary). Uczyłem w X LO imienia Klementyny Hoffmanowej w Warszawie. Już nie trzeba było pozwolenia cenzury na odbijanie zadań na kserografie. Reformy lat siedemdziesiątych zostały praktycznie zarzucone, a likwidację matematyki na maturze środowisko powitało z mieszanymi uczuciami. Znaczna część koleżanek i kolegów mówiła, że to dobrze, nie trzeba będzie połowy klasy „ciągnąć za uszy", a pozostałych wręcz dowartościuje, że są lepsi, bo rozumieją matematykę. Wspominam ten okres bardzo mile. Powrót do przeszłości. Taka sama matematyka, jak u pana Chyry… tylko na trochę wyższym poziomie. Uczyliśmy zatem logiki, teorii zbiorów, zamiast „postęp geometryczny" mówiliśmy „ciąg geometryczny", probabilistyki, funkcji, różniczkowania, całkowania i rozwijania w szereg. Tu kilka zdań o rachunku prawdopodobieństwa. Został włączony do nauczania szkolnego w zbożnym celu: pokazania pełnej teorii matematycznej od aksjomatów po zastosowania. Musiał być okrojony do zbiorów skończonych, żeby nie wchodzić w teorię miary. W tym duchu powstał piękny pierwszy podręcznik autorstwa Wiesława Szlenka. Potem to się wszystko rozmyło i rachunek prawdopodobieństwa jest klasycznym, że się tak wyrażę, michałkiem. Jest w programie, trzeba go uczyć, ale trochę zawadza i nikt tego naprawdę nie umie. Piszę ze swojej obecnej perspektywy – oglądania studentów pierwszego roku najrozmaitszych wydziałów. Nie brakuje i takich, którzy na zadanie typu „wyznacz prawdopodobieństwo", dostawali wynik $p = 78$ i kłócili się, że „przecież tak mi kalkulator obliczył, więc to musi być dobrze".

Wrócę znów na chwilę do mojego nauczyciela inżyniera Wacława Chyry. Nie był jakimś wybitnym nauczycielem, a z perspektywy czasu umiem dostrzec jego braki w wykształceniu matematycznym. Miał jednak jakąś charyzmę – może docenialiśmy jego przeszłość powstańczą (był to wtedy temat tabu, ale jakoś przesączał się do uczniów). Może po prostu docenialiśmy jego sprawiedliwość i solidność. Prace domowe sprawdzał z dokładnością do źle postawionego przecinka i krzywej kreski ułamkowej. Na klasówkach wolno było więcej bazgrać. Pisał na tablicy dowód i krok po kroku wyjaśniał. Miał zwyczaj odpytywania całej klasy z jednego zagadnienia. Pamiętam, jak wszystkich po kolei odpytał z „parzystych", z wzoru na $(a + b)^2$, „nieparzystych" z $(a - b)^2$. Piętnaście razy z plusem, piętnaście z minusem. Czynił to zresztą z pewnym dystansem, niemal żartując – ale odpytywał. Nauczył mnie tak, że do tej pory umiem! Stosowałem podobną metodę w różnych sytuacjach.

Wracam do lat 85. Zaczęły się pojawiać komputery. Próbowałem włączyć je do nauczania matematyki. Nikt nie był szczęśliwy. Dyrekcja szkoły i nauczyciele informatyki, że wchodzę nie na swoje poletko. Uczniowie skarżyli się na dodatkową porcję umiejętności. A ja nie potrafiłem znaleźć formuły: jak ich z tego odpytywać. Wśród wielu dyskusji, czego uczyć w szkole, sensowna jest odpowiedź: w szerokich granicach „byle czego" – abyśmy tylko mogli „z tego" ułożyć zadania. Mimo to fazę mojej pracy dydaktycznej wspominam najlepiej. Już z doświadczeniem, już nie tak „na hurra", tylko spokojnie, do przodu. Pozwalałem sobie wtedy i na „pięciominutówki wychowawcze" – wtedy niekontrowersyjne. Miałem już do dyspozycji dobre podręczniki. Jasny ten obraz nauczania u schyłku PRL i początków „wolności" dopełnia to, że, jak ja ćwierć wieku wcześniej, tak i tamto pokolenie miało szczęście: po 1990 roku każdy młody człowiek z porządnym wykształceniem mógł znaleźć pracę na kierowniczym stanowisku co najmniej średniego szczebla w filii powstających, jak grzyby po deszczu, firm zagranicznych. Jeszcze nie był to „wyzysk korporacyjny", a już płacono niewyobrażalnie wysoką pensję. Chociaż nauczyciele przestawali być „inteligencją", a stali się „budżetówką", to pełnego pogardy i zawiści słowa „wykształciuch" jeszcze nie było.

W kształceniu nauczycieli wahadło poszło w drugą stronę. Na Uniwersytecie Warszawskim stworzono Kolegium Nauczycielskie. Teraz założenie było inne: trzeba od początku oddzielić przyszłych nauczycieli od reszty. Nie mieszać zawodowców z trzecią ligą. Skutek był jeszcze gorszy, ale o tym nawet nie chcę pisać. Tylko jedno. Dziewczęta w tym kolegium były różne: jedne lepsze, inne gorsze, jak to w rozkładzie normalnym. Chłopcy niemal bez wyjątku byli poniżej poziomu przyzwoitości, otwarcie przyznający, że są tu przypadkiem i nigdy nie poniżą się do pracy w szkole. Chyba mało który student-mężczyzna tamtego kolegium dobrze mnie wspomina. Byłem głuchy na argumenty: „jeżeli nie dostanę trójki, to pójdę na dwa lata do wojska". Proszę mnie osądzić, czy słusznie. Około 2000 roku rozwiązano Zakład Dydaktyki Matematyki na Wydziale Matematycznym Uniwersytetu Warszawskiego.

Dwudziesty pierwszy wiek

W tym stuleciu regularnie uczyłem już tylko studentów. Byli to jednak studenci I roku z najrozmaitszych wydziałów, a więc niedawni maturzyści. Pisałem o tym wyżej. Miałem i mam wiele zajęć pozalekcyjnych dla dzieci, młodzieży i dorosłych. Dużo nauczyły mnie zajęcia dla dzieci z Ukrainy latem 2022 roku. Dużo dały korepetycje *on-line* dla licealistów z Podkarpacia (wolontariat organizowany przez pewien ruch społeczny) – uczniowie ci „nie umieli nic".

Jak uczę teraz? Muszę powiedzieć, że jestem w opozycji do poglądów wielu kontynuatorów myśli pani profesor Zofii Krygowskiej. Chodzi o rozmiękczanie matematyki. Znowu przywołam Stefana Turnaua, wybitnego kontynuatora myśli pani Profesor (kolejny fragment z wywiadu w *Refleksjach*):

> Widzę teraz dwa, w pewnym sensie przeciwne, znaczenia »zmiękczania« matematyki. Jedno to powierzchowny formalizm: zredukowanie matematyki do gotowych procedur symbolicznych i sztywnych schematów rozwiązywania typowych zadań. A drugie to przesunięcie nauczania w stronę dziedziny quasi-eksperymentalnej i pseudo-intuicyjnej. Oba te kierunki mają na celu uczynić matematykę dostępniejszą dla wszystkich uczniów. I oba odciągają ten przedmiot od nauki, którą uważamy za uniwersalnie użyteczną. Profesor Zofia Krygowska, matematyk i pedagog, bez wątpienia sprzeciwiłaby się obydwu.

Znowu, czy nam się podoba, czy nie, egzamin maturalny w dużej części polega na wykazaniu się umiejętnością stosowania gotowych procedur. To jest cena, jaką płacimy za „standaryzację”, za możliwość obiektywnego oceniania wszystkich przez wszystkich. W matematyce to jest dopuszczalne. Po drugie nie wiem, czy stosuję metodę eksperymentalną, czy *quasi*-eksperymentalną, czy intuicyjną, czy pseudointuicyjną. Na moich zajęciach pokazuję kolorowe rysunki, staranne modele, pokazuję, jak zaprząc do roboty komputer. Rzucam monetami (przez lata zbierałem jednogroszówki i teraz rozdaję kilkudziesięciu uczniom po 10 i polecam policzyć, ile razy wypadła reszka). Nauczyłem się robić filmiki geometryczne. Rozwiązania równań ilustruję na ekranie. Używam klocków Lego i REKO. Owszem, traci na tym logiczne wnioskowanie. Wiem, że to tracę. Ale uczniowie i studenci mają poczucie, że rozumieją. Właśnie: mają poczucie. Nie tracą nic uczniowie zainteresowani matematyką. Oni wiedzą, że to wszystko tylko pomoc i podpórka.

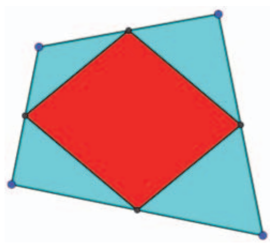
Kilka zdań o rozumieniu. Jedyną poprawną definicją słowa „rozumiem” jest: „sprowadziłem to do spraw, które już zrozumiałem”. Dydaktycy zarzucają tej definicji, że zawiera błąd *idem per idem* – ‘to samo przez to samo’. Jednak, kiedy się przyjrzeć innym określeniom, zawsze się wszystko właśnie do tego sprowadza, być może tylko okrężną drogą. Nowe pojęcie wskakuje w naszym mózgu na przygotowane dla niego miejsce. Tylko: jak ułożyliśmy pierwszy klocek. Owszem, formalnie taka indukcja nie ma początku. Ma! Tylko ginie on w naszym niemowlęctwie, może jeszcze wcześniej.

„Popatrz, jak ładnie świecą gwiazdy; pocałuj mnie" powiedziała dziewczyna do studenta astronomii na spacerze w ciepły czerwcowy wieczór. „Najpierw wytłumaczę ci, dlaczego świecą" – odparł rzeczowo. Mamy XXI wiek. Komputery, smartfony, laptopy, tablety, zegarki. W nauczaniu nie tępię tych przyrządów. Natomiast uczę studentów: musisz rozumieć, co komputer do ciebie mówi. To osobna wiedza, wcale niełatwa.

I jeszcze jedno, ważne. Od zawsze dajemy uczniom zadania, oni rozwiązują albo nie. Czy można inaczej? Próbuję tak nauczać. Czy to utopia? Chyba tak, przecież nie da się inaczej!

Od lat chodzi mi po głowie nieco inny *paradygmat* nauczania matematyki. Czy na kolokwiach, sprawdzianach, kartkówkach, egzaminach, olimpiadach można dać takie polecenie: Oto proste twierdzenie. Udowodnisz je bez trudu. Napisz, co ciekawego w nim dostrzegasz. Jakieś uogólnienia, dygresje, boczne arabeski? A może ładnie opiszesz jego ulotne piękno? Co Ci w duszy gra? Pamiętaj tylko, że jesteś w obrębie matematyki i oprócz nastrojowego opisu musisz się stosować do reguł Królowej Nauk.

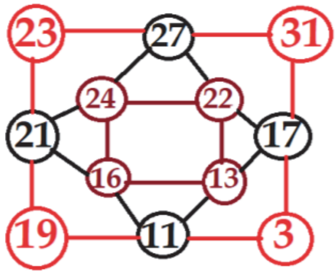
Zwykle podaję jako przykład twierdzenie o równoległoboku środków. Łącząc środki boków dowolnego czworokąta, dostaniemy równoległobok. Bardzo łatwy dowód jest w typie, który najbardziej lubię: dorysuj jedną kreskę, a rozwiążesz. Tutaj należy dorysować przekątną i skorzystać z tego, że prosta łącząca środki boków trójkąta jest równoległa do podstawy.



Rysunek 2. Równoległobok środków

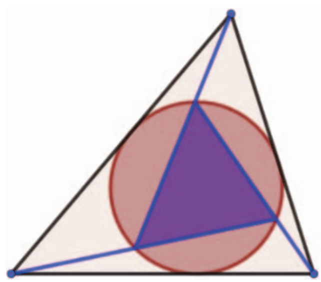
Co tu widzisz? Jakie twierdzenie? Postaw pytania. Uogólnij!

Podam kilka: kiedy otrzymamy prostokąt, romb, kwadrat? Czy można do danego równoległoboku dorysować czworokąt tak, aby wierzchołki równoległoboku były środkami boków? Czy na jeden sposób? A co dla trójkąta (zamiast czworokąta), a dla innych wielokątów? A może wyjdźmy w przestrzeń? Jaką bryłę tworzą środki ścian sześcianu? A czy widzisz związek tego geometrycznego twierdzenia z arytmetyczną zależnością, jak na rysunku 3).



Rysunek 3. Według jakiej zasady wpisywane są te liczby?

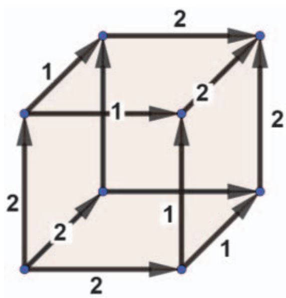
Czy można zatem dawać takie zadania otwarte? Spojrzyj, opisz, co widzisz. Znajdź coś interesującego. Hm, na maturze nie. Za dużo subiektywności w ocenie. Na konkursach – już łatwiej. Na lekcjach: jak najbardziej. To uczy twórczego, a nie odtwórczego podejścia. Jeżeli ktoś od razu odrzuca ten pomysł, jako nierealny, niemożliwy do zrealizowania i niepasujący do ścisłych reguł matematyki, to odpowiem takim oto argumentem. W 2017 roku uczeń z Garwolina, RODO, dostał kilka nagród, w tym srebrny medal w polskich eliminacjach konkursu EUCYS (Europejski Konkurs Młodych Naukowców – obejmuje to wszystkie dziedziny nauki, od historii, psychologii i biologii przez geografię, geologię, fizykę, chemię, astronomię itd. do matematyki) – za analizę tego, co zobaczył na tym… rysunku.



Rysunek 4

Co tu ciekawego? Czy takie odkrycie to coś poważnego? No cóż, nie wystarczyło na złoty medal w EUCYS, Konkursie Młodych Naukowców Unii Europejskiej, a zaledwie na srebrny w polskich eliminacjach… i dwie inne nagrody. Autor (uczeń klasy przedmaturalnej) opowiedział o swoim odkryciu na Zjeździe Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki we Wrocławiu i dostał owację na stojąco 600-osobowego audytorium.

Inne zagadnienie. Co widzisz, gdy patrzysz na sześcian? Tylko sześcian? Tylko tyle? Spójrz na rysunek 1. A jakie inne zadania można ułożyć na temat „sześcian"? Proszę bardzo: do dwóch wierzchołków sześcianu, *A* oraz *B*, podłączono prąd. Opór każdej krawędzi to 1 Ω. Wyznacz opór całego układu. Nie pamiętasz praw Kirchhoffa z fizyki? Nie szkodzi, przetłumaczę to na „zadanie o pociągach". Sieć połączeń między stacjami Kolei Lokalnych jest taka, jak na rysunku 5. Zawiadowca stacji *A* ma wysłać *n* wagonów do stacji *B*. Przepustowość każdego odcinka sieci jest równa 1 – to znaczy jeden wagon na jednostkę czasu. Jak ma wysłać te wagony? Odpowiedź widać na rysunku 5. Ze stacji dolnej *A* wysyła po dwa wagony w każdą stronę. Potem jadą pojedynczo, a potem znowu są łączone w pary. Sześć wagonów przejeżdża w czasie 5. Przepustowość sieci wynosi zatem $\frac{6}{5}$. Czy widzisz, że rozwiązałeś i zadanie o oporze elektrycznym? Jest równy $\frac{5}{6}$.



Rysunek 5

***

Dziś dostrzegam zalety i wady niemal wszystkich opcji i rozwiązań dydaktycznych i rozumiem rozterki decydentów, którzy jakieś decyzje muszą podjąć, chociaż obecna (2022) ekipa nie myśli przecież kategoriami dobra szkoły i dobra nas wszystkich. Chciałbym natomiast wspomnieć mojego „starszego kolegę" dr. Jerzego Lisiewicza, nieżyjącego już „nauczyciela z krwi i kości", który wprowadzał mnie w tajniki nauczania matematyki. Uczył zresztą wielu przedmiotów, nie tylko ścisłych. Był po prostu humanistą. Dziękuję mu w szczególności za uświadomienie mi podstawowych celów, jakie powinniśmy sobie stawiać, stając przed klasą. To nie było wcale oczywiste dla młodego naukowca, jakim kiedyś byłem. Przy każdej bytności na warszawskim Bródnie zapalam światełko na grobie Jerzego Lisiewicza. Oto cała jego dydaktyka matematyki – sprowadzone do prostych reguł cele wszystkich naszych wysiłków:

- czysta, schludna matematyka,
- pokazanie, że *to* się jednak przydaje,
- sposoby pracy z problemem intelektualnym.

Prawie wszystko z tego wynika. Prawie? Czego brakuje? Nie chcę nadużywać wzniosłych słów, a właściwie jednego, łączącego w sobie uczucie, zaangażowanie, troskę i odpowiedzialność zarazem.

Badania naukowe z dydaktyki matematyki a rzeczywistość szkolna

Witold Pająk

Powiatowy Zespół Nr 1 Szkół Ogólnokształcących im. ks. Stanisława Konarskiego w Oświęcimiu
witold.pajak@wp.pl
ORCID: 0009-0003-0421-1219

Streszczenie

Nauczyciele to grupa zawodowa na tyle liczna i wykonująca tak ważną społecznie pracę w kształtowaniu młodego pokolenia, że zasługuje na bardzo dobrą opiekę naukową, której celem jest między innymi wspomaganie oraz wyznaczanie właściwych dróg prowadzących do właściwego poznawania przez młodzież i dzieci odpowiedniej materii przedmiotowej. Poniższy artykuł opisuje, z punktu widzenia nauczyciela praktyka z 30-letnim stażem zawodowym, jak wygląda obecnie oddziaływanie wyższych uczelni na nauczanie matematyki w szkole powszechnej, jakie są bolączki tego oddziaływania i jak im przeciwdziałać.

Abstract

Teachers are a professional group that is so numerous and performs such socially significant work in shaping the young generation that it deserves a very good scientific "guidance", the purpose of which is, among others, to support and determine the right paths leading to proper learning the relevant subject matter by children and adolescents. The following article describes, from the point of view of a teacher with 30 years of professional experience, what the current impact of universities on teaching mathematics in public schools looks like, what the problems of this influence are and how to counteract them.

Nauczanie matematyki jest dla rozwoju edukacji, w jej ogólnym rozumieniu, ważnym elementem; dotyka ono nie tylko samej matematyki, ale wpływa na kształcenie w innych obszarach. Dlatego też wsparciem dla nauczycieli matematyki powinny być dokonania naukowe związane nie tyle z matematyką jako taką, ale z jej nauczaniem na poziomie szkolnictwa powszechnego (szkoła podstawowa i ponadpodstawowa). Od razu zaznaczę, że nie chodzi mi o ogólne wskazania typu pedagogicznego, ponieważ one odnoszą się jako takie do procesu nauczania bez względu na przedmiot nauczania. Zatem mają charakter ogólny, niby uniwersalny, a tak naprawdę pomijają najistotniejsze aspekty nauczania, nie rozwiązując szczegółowych powstających w tym procesie trudności. Pedagog nie ma odpowiedniej wiedzy na temat trudności wynikających z samej matematyki, nie może więc właściwie wypracować metod ich przezwyciężania. Przykładowo problemem dla uczniów są ciągi, kombinatoryka, ale sposoby poradzenia sobie z tymi treściami matematycznymi może znaleźć jedynie matematyk, bo zna naturę problemu i trudności. Również w zakresie zasad uczenia się matematyki – nauczyciel przedmiotowiec wie najlepiej, na czym polega dobre opanowywanie treści i umiejętności. Dlatego nauczaniem matematyki powinni się zajmować dydaktycy matematyki, a więc przede wszystkim matematycy z wykształcenia, którzy mogą zrozumieć problemy matematyczne uczniów i znajdować odpowiednie rozwiązania w duchu nauki i prawdy. Badania naukowe z dydaktyki matematyki powinny być więc umiejscowione przy instytutach matematyki na wyższych uczelniach, a nie jako „doklejka" do zadań pedagogów i to z odpowiednią dużą rangą (por. Pardała, Utiejewa, 2008, s. 149).

CZY WYNIKI BADAŃ DYDAKTYCZNYCH ŁATWO PRZECHODZĄ DO SZKÓŁ, DO NAUCZYCIELI I WRESZCIE DO SAMEGO NAUCZANIA?

Ta kolejność nie jest przypadkowa, gdyż sama informacja o nowinkach dydaktycznych w szkole to za mało, sama wiedza nauczyciela to też za mało, dopiero odpowiednia lekcja jest prawdziwym odzwierciedleniem wypracowanych naukowo idei (nauczania matematyki). Sama wiedza nauczycielska lub szkolna to stanowczo za mało, jeśli nie będzie dzięki temu lepszej lekcji i w konsekwencji lepszego poznania materii matematycznej przez uczniów, ponieważ celem nauczyciela matematyki jest coraz lepsze zaznajomienie uczniów z matematyką (na poziomie szkolnym). Oczywiście w tym momencie należałoby się zastanowić nad celami nauczania matematyki w ogóle, które zapewne też w obecnych czasach powoli ewoluują. Wydaje się, że dużą rolę w tworzeniu i urzeczywistnianiu celów mają ośrodki naukowe, ale również potrzeby innych gałęzi życia, gospodarki itp.

Nie jest łatwe pozyskiwanie przez nauczycieli wiedzy na temat nowości dydaktycznych, a nawet utrudnione. Liczba czasopism dla nauczycieli matematyki jest skromna, coraz rzadziej w wersji papierowej (np. zniknęło w ostatnich latach czasopismo *Nauczyciele i Matematyka*). Przekazy internetowe są niepewne, trudne do namierzenia i nie zawsze mają charakter wiedzy potwierdzonej naukowo. Literatura naukowa dotycząca dydaktyki matematyki jest dedykowana przede wszystkim naukowcom, a nie odbiorcom bezpośrednim, którymi są nauczyciele. Niektóre publikacje są obcojęzyczne, pisane w języku hermetycznym, dalekim od języka nauczycielskiego. Brak jakiegoś wyraźnego miejsca, gdzie „nowinki" dydaktyczne można by znaleźć i o nich przeczytać. Nie chodzi jednak o pełne opisy badań, wyników i analiz, ale przede wszystkim o konkretne wnioski do pracy dla nauczyciela, do pracy na lekcji. Tego właściwie nie ma. Przekazy słowne na konferencjach mają bardzo skromny zasięg zarówno czasowy, jak i terytorialny. Również liczba takich naukowych konferencji (organizowanych przez ośrodki naukowe dla nauczycieli) jest mała, wręcz znikoma. Owszem, pojawiają się konferencje doskonalące, ale często brak na nich wyraźnego odniesienia do dokonań naukowych. Jeśli zatem już na poziomie przekazu informacji jest duża bariera, to co dopiero oczekiwać odpowiedniego przełożenia do nauczania matematyki w szkole. Wydaje się, że wiedza nauczycieli (zarówno młodych, jak i doświadczonych) jest mała.

KSZTAŁCENIE STUDENTÓW – PRZYSZŁYCH NAUCZYCIELI MATEMATYKI

Innym ważnym aspektem związanym z przekazem naukowych idei do nauczania matematyki jest odpowiednie kształcenie studentów. Jeśli na etapie przygotowywania przyszłego nauczyciela na wyższej uczelni nie nastąpi przekaz naukowy, nie nastąpi „zaszczepienie" świadomości o ważności nauki w nauczaniu matematyki, to również w przyszłości poszukiwanie przez tak wykształconego nauczyciela odniesień swojej pracy do dokonań naukowych będzie raczej iluzoryczne (por. Pardała, Utiejewa, 2008, s. 151). Tak ważne więc wydaje się, aby kształceniem przyszłych nauczycieli matematyki zajmowały się wyspecjalizowane zakłady dydaktyki matematyki przy instytutach matematyki. Nauczanie przyszłych nauczycieli nie powinno być mało znaczącym dodatkiem na innych kierunkach matematycznych. Niestety można również zaobserwować, że kształceniem nauczycieli matematyki zajmują się także pedagodzy na ogólnych kursach dla wszystkich. Niewłaściwe kształcenie przyszłych nauczycieli to osłabianie samej szkoły i rezultatów pracujących w nich nauczycieli. Takie kształcenie „tworzy" nauczyciela bez odpowiednich argumentów do dalszej pracy oraz łatwego do manipulowania. Głos w tej sprawie powinien być jasno i donośnie sformułowany oraz egzekwowany głównie przez pracowników naukowych. Daje się także zauważyć „zanik" takich typowych, dobrze osadzonych w strukturze instytutów, zakładów dydaktyki matematyki.

Rozważając problem kształcenia studentów – przyszłych nauczycieli matematyki, warto się zastanowić nad liczebnością takich kierunków, nad poziomem wiedzy matematycznej przyszłych nauczycieli matematyki. Ów poziom wiedzy jest odbiciem tego, co się dzieje w szkole; jeśli on nie zadowala, to może należy zadać sobie pytanie „dlaczego?” i kształcąc przyszłych nauczycieli matematyki, zadbać, aby oni w przyszłości lepiej kształcili swoich uczniów. Można więc rzec, że **poziom kształcenia uczniów w szkole jest odbiciem tego, w jaki sposób kształci się przyszłych nauczycieli**. Pomijam w tym momencie aspekt prestiżu zawodu nauczyciela, ponieważ to nie jest temat tego artykułu. Jednak zwrócę uwagę na aspekt etyki zawodu nauczyciela w kontekście przedstawiania studentom, przyszłym nauczycielom, norm, jakimi powinni się kierować w pracy z uczniami, w pracy z rodzicami i innymi pracownikami szkoły. Samo nauczenie studentów matematyki teoretycznej, potem dydaktyki, w pewnym sensie wystarczy, aby uczyć. Ale w duchu wychowawczej roli szkoły i nauczyciela to jeszcze za mało. Dzisiaj obserwuje się nieumiejętność rozwiązywania wielu problemów wychowawczych bez uszczerbku dla nauczania matematyki. Nader często „załatwienie” problemu z uczniem lub rodzicem (czasem niestety także z innymi pracownikami szkoły) wiąże się z wystawieniem lepszej notki, niż uczeń zasługuje. Tak zwany „święty spokój” nie powinien być jakimkolwiek wyjaśnieniem ze strony nauczyciela. I właśnie, jak sobie w takich sytuacjach radzić, student – przyszły nauczyciel powinien nauczyć się jeszcze na studiach (por. Ciesielska, Major, Powązka, 2009, s. 48–49). Czasem na uczelniach kształcących nauczycieli pokazuje się szkołę bardzo idealistyczną.

Równie ważnym elementem kształcenia studentów jest bardzo dobra znajomość szkoły, jej problemów i uwarunkowań. Zamykanie się wśród naukowców jedynie na problemy swojej „działki” skutkuje przekazem studentom idei oderwanych od życia. Być może byłoby inaczej, gdyby w procesie kształcenia rozwiązywać problemy szkolne na podstawie realiów szkoły. A czasami są to rzeczy bardzo prozaiczne, np. problemy z dyscypliną uczniów; przeładowane programy, brak czasu na dochodzenie do treści i ich gruntowanie; nadmierna ingerencja rodziców w sprawy nauczania (i oceniania) uczniów; oczekiwania nadzoru pedagogicznego w stosunku do efektów mierzonych oceną, egzaminem; „samotność” nauczyciela w dobrym poradnictwie dotyczącym nie tylko spraw przedmiotowych, ale i szkolnych; niekompetencja osób oceniających pracę nauczyciela; zbyt duże uprawnienia pedagogów i psychologów w szkole w aspekcie formułowania wymagań mocno „kłócących” się z zasadami dobrego i sprawiedliwego nauczania. Takich problemów szkolnych jest zapewne jeszcze więcej, ale często to one właśnie wpływają na to, co dzieje się na lekcji matematyki. Czasem potrzeba niezwykle wielkiego hartu, aby zgodnie z zasadami dobrej pracy nauczyciela matematyki prowadzić lekcje (również z szacunkiem dla swoich nauczycieli akademickich), rozmawiać z rodzicami, właściwie oceniać postępy uczniów i jeszcze mieć satysfakcję z dobrze wykonywanej pracy.

Innym aspektem pracy z przyszłym nauczycielem jest przyzwyczajanie go do permanentnego samokształcenia, do poszukiwań coraz lepszych rozwiązań dydaktycznych, nie tylko wypracowanych przez samych nauczycieli, ale przez kadrę naukową. Taka chęć powinna towarzyszyć każdemu absolwentowi, który wchodzi w zawód nauczyciela.

A JAK TO JEST W INNYCH DZIEDZINACH NAUKI Z PRZEKAZEM WIEDZY NAUKOWEJ POD „STRZECHY"?

Niech przykładem będzie medycyna. Istnieją kliniki, instytuty i zakłady badawcze – w nich pracują lekarze, naukowcy, starając się wdrażać nowe metody leczenia, zarówno w sensie technik (np. w chirurgii, w diagnostyce), ale i środków (np. nowe leki, specyfiki, narzędzia, urządzenia). Pierwszym sposobem przekazu nowości jest szybka publikacja w języku polskim w czasopismach zarówno naukowych, jak i typowo branżowych dla lekarzy. Coraz częściej takie publikacje są dostępne przez internet. Drugą formą są konferencje, sympozja naukowe – są one ciekawe, rzadsze i niestety często płatne. Niektóre informacje docierają poprzez zainteresowane zakłady wytwórcze (np. w farmacji) w postaci ulotek, próbek. Jednak kluczowym czynnikiem dostępności do nowości jest zainteresowanie samych odbiorców lekarzy oraz możliwości finansowania. Szpitale nie zawsze są zainteresowane nowościami, bo są one na ogół drogie i ewentualna amortyzacja jest za długa. Również wykształcenie pracownika, aby mógł z nowości umiejętnie skorzystać, jest czasochłonne. Dokształcanie się wymaga od zainteresowanych zarówno czasu, poświęcenia, jak i własnych pieniędzy. I to są na ogół bariery, które w pewnym momencie odgrywają rolę kluczową.

Kolejne zagadnienie dotyczy już nie tyle przekazu samej myśli naukowej, ale jej usytuowanie, czyli „gdzie powinno być «widać» nowe myśli naukowe?". Zapewne od razu narzuca się pomysł, że nowe myśli najłatwiej przenieść na grunt szkolny poprzez podręczniki szkolne. I dużo w tym racji. Jednak jak spojrzymy na autorów podręczników szkolnych, to okazuje się, że wśród nich są głównie nauczyciele, praktycy nauczania, często ze szkół z bardzo dobrą młodzieżą. Dlaczego nie ma wśród nich pracowników naukowych, którzy mogliby w takiej formie przenosić nowe idee dydaktyczne do szkoły? Oczywiście to wymaga ogromu pracy, ale byłaby to chyba dość oczywista ścieżka przenoszenia dobrych wzorców na grunt klasy. Być może te aspekty mają „załatwić" rzeczoznawcy, wśród których dużo więcej jest pracowników naukowych (co nie oznacza, że mających wiele wspólnego z dydaktyką matematyki). Rzeczoznawcy o wiele bardziej dbają o ścisłość naukową samej dziedziny nauki (czyli matematyki) niż o prawidłowości w jej przekazie uczniowi. Dlatego może łatwiej spotkać podręczniki przesycone symbolami, terminami czy rozdmuchanymi wiadomościami niż koncepcjami budowania u uczniów trwałej i dobrze rozumianej wiedzy.

Innym sposobem przechodzenia myśli naukowej do szkół jest właściwa adaptacja w szkole młodych adeptów nauczania, czyli takich, którzy ukończyli dobre uczelnie kształcące nauczycieli. To właśnie oni, choć bez doświadczenia, ale pełni zapału i głów otwartych na nowości przekazane na uczelni, mogą starszym koleżankom i kolegom przekazać przemyślenia na temat „jak uczyć". Myślę, że taka trochę dziwna wymiana poglądów mogłaby w przyszłości owocować w różnych aspektach. Młody nauczyciel zapozna się z poglądami doświadczonych kolegów czy koleżanek, ale sam może wnieść nowego „ducha" do nauczania w szkole. Zdaję sobie sprawę, że jest to bardzo trudne i narażone na nikłe powodzenie, ale każdy sposób przedostawania się nowych idei jest dobry. Nawet jeśli starszy nauczyciel nie zechce niczego w swoim nauczaniu zmieniać, to przynajmniej będzie miał okazję poznać coś nowego. Poza tym budowanie prawidłowych stosunków w pracy może się odbywać właśnie przez takie spotkania i wymianę poglądów z poszanowaniem praw każdego uczestnika do ich prezentacji (bez względu na wiek i staż pracy nauczycielskiej).

Kolejnym sposobem na przechodzenie myśli naukowej do szkolnej rzeczywistości jest wpływ naukowców na podstawy programowe oraz inne oficjalne dokumenty oświatowe dotyczące bezpośrednio nauczania (w tym matematyki). To w nich kreuje się również określone myśli. Jeśli badania naukowe potwierdzają proces nauczania jako proces długofalowy, to naszpikowanie podstaw programowych mnóstwem pojęć koniecznych do opanowania w krótkim czasie jest zaprzeczeniem wyników tychże badań. A wydaje się, że taka tendencja usilnie jest propagowana, głównie ze szkodą dla nauczania, szkoły i edukacji w szerokim tego słowa rozumieniu. Ze strony kadry naukowej powinien w tym względzie pójść bardzo wyraźny sygnał. Jego brak może niweczyć nawet najlepsze metody, pomysły na nauczanie, ponieważ staną się one niewykonalne w taki sposób, który gwarantowałby sukces.

Również dość dobrym sposobem przekazywania idei naukowych bezpośrednio do nauczycieli są konferencje metodyczne. Wymaga to jednak albo dobrych metodyków, tzn. śledzących prace naukowe, albo dobrych prelegentów zapraszanych przez ośrodki kształcenia nauczyciela. Prelegentami zatem powinni być sami naukowcy nie tylko przekazujący odpowiednie treści słuchaczom, ale wskazujący na konkretne rozwiązania praktyczne w zderzeniu z autentyczną rzeczywistością szkolną. Takie podejście mogłoby również nakierować wysiłki naukowców na konieczne przystosowanie własnych wyników badań do realiów szkolnych.

I NA KONIEC…

Obserwując z pozycji nauczyciela praktyka i jednocześnie osoby, która kiedyś prowadziła konkretne badania naukowe, odnoszę wrażenie o bardzo skromnym przekazie myśli naukowej na grunt nauczania matematyki w szkole. Być może jednym z powodów takiego stanu rzeczy jest niewystarczająca znajomość szkoły przez samych naukowców. Brak odpowiednio dużego doświadczenia w pracy z uczniami, zbyt dalekie odejście od „normalnej" szkoły nie poprawią stanu dydaktyki matematyki. To trochę tak, jakby techniki chirurgiczne wymyślali chirurdzy, którzy nie operują.

Obecnie w praktykę szkolną bardzo mocno wszedł komputer albo, szerzej mówiąc, technologia informacyjna. Ale tak właściwie do czego służy komputer w szkole? Na pewno do komunikacji między nauczycielem a uczniami lub między samymi uczniami (w tym przesyłanie zadań, tworzenie testów itp.). Mieliśmy okazję obserwować i uczestniczyć w takiej pracy w trakcie nauczania zdalnego. Ale to głównie techniczny aspekt wykorzystania komputera (Pająk, 2021, s. 22). Ponadto na lekcji komputer to również super wyświetlacz (do tekstów, zdjęć, filmów, prezentacji itp.), ale to również eksponuje walory techniczne komputera. Oczywiście mają one przełożenie na wartości dydaktyczne, ale tylko pośrednie (Pająk, 2017a, s. 16–17). Brakuje dzisiaj dobrego „klimatu" do dydaktycznego wykorzystywania komputera, bo z tego trudno zrobić „show"; wymaga to skupienia, ciszy, samodzielnej pracy, a efekty nie są natychmiastowe czy mierzalne jakimś egzaminem.

Powyższe uwagi nie powodują euforii, a wręcz przeciwnie – wydaje się, że droga od naukowca dydaktyka matematyki do nauczyciela jest raczej dłuższa niż krótsza, choć paradoksalnie sposoby komunikacji znacznie się poprawiły i skróciły. Ale to tylko sposoby – czynnik ludzki nie został ani przyspieszony, ani zmodernizowany. Edukacja zajmuje bardzo znaczące miejsce w świadomości ludzi, grupa nauczycieli matematyki jest dość duża, zatem zasługuje ona na właściwą „oprawę" naukową. Co więcej, pomysły „zwykłych" nauczycieli powinny również stanowić przyczynek do wnikliwych badań naukowych. Być może wymaga to podejścia typu: „Jeśli praca nauczyciela matematyki to misja, to również praca dydaktyka matematyki powinna być misją".

BIBLIOGRAFIA

Ciesielska, D., Major, J., Powązka, Z. (2009). Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II. W: A. Chronowski, M. Klakla (red.), *Z badań nad sylwetką absolwenta matematycznych studiów w Akademii Pedagogicznej w Krakowie w latach 2001–2007* (s. 37–50). Kraków: Wydawnictwo Naukowe UP.

Kojs, W. (2001). *Procesy komunikacyjne w szkole. Wyznaczniki, tendencje, problemy*. Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.

Pająk, W. (2017). Środki dydaktyczne w nauczaniu matematyki. *Hejnał Oświatowy*, *3*(161), 15–19.

Pająk, W. (2017). Kilka refleksji na temat nowej podstawy programowej matematyki dla ośmioletniej szkoły podstawowej. *Hejnał Oświatowy*, *6*-*7*(164), 19–21.

Pająk, W. (2019). Nauczanie matematyki w nowym czteroletnim liceum ogólnokształcącym – spojrzenie nauczyciela w świetle nowej podstawy programowej. *Hejnał Oświatowy*, *8*-*9*(185), 20–22.

Pająk, W. (2021). Zdalne nauczanie – szanse i wyzwania. Spojrzenie nauczyciela matematyki. *Hejnał Oświatowy*, *3*(201), 21–23.

Pardała, A., Utiejewa. R. (2008). Współczesne problemy nauczania matematyki. W: H. Kąkol (red.), *Problemy matematycznego kształcenia w świetle III międzynarodowej konferencji naukowej Matematyka. Kształcenie. Kultura Togliatti'2007* (s. 143-153). Bielsko-Biała: Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki.

Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla liceum, technikum i branżowej szkoły II stopnia. Pobrano z: https://www.ore.edu.pl/2018/03/podstawa-programowa-ksztalcenia-ogolnego-dla-liceum-technikum-i-branzowej-szkoly-ii-stopnia/ z dnia 23.03.2018.

Część II
– BADANIA DYDAKTYCZNE, WNIOSKI Z BADAŃ

O LEPSZE ZROZUMIENIE PROCESU UCZENIA SIĘ MATEMATYKI PRZEZ UCZNIÓW

Myślenie funkcyjne w ujęciu teoretycznym i według ekspertów – studium przypadków

Mirosława Sajka

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
miroslawa.sajka@up.krakow.pl
ORCID: 0000-0002-0209-7817

Streszczenie

Rozdział ten przedstawia różne definicje i rozumienie terminu *myślenie funkcyjne* oraz postrzeganie aktywności związanych z rozwijaniem *myślenia funkcyjnego* u uczniów na podstawie przeglądu bieżącej literatury specjalistycznej, a także na podstawie prowadzonych wstępnych badań empirycznych. Przeprowadzono pięć wywiadów z ekspertami z zakresu nauczania na poziomie wczesnoszkolnym, nauczania matematyki w szkole podstawowej i ponadpodstawowej, będącymi nauczycielami lub pracownikami naukowo-dydaktycznymi prowadzącymi badania z zakresu edukacji matematycznej oraz kształcącymi przyszłych nauczycieli matematyki na wszystkich wspomnianych poziomach. W wyniku analizy wywiadów przedstawiono, w jaki sposób eksperci rozumieją myślenie funkcyjne i jakie aspekty rozumienia pojęcia funkcji były przez nich akcentowane jako ważne. Trzy wnioski warto przedstawić w tym kontekście: (a) Okazało się między innymi, że eksperci z zakresu szkoły ponadpodstawowej nie zwracali uwagi na rozumienie funkcji jako reguły wejścia/wyjścia ani jako rozumowania współzmiennościowego, które są charakterystyczne dla wcześniejszych etapów nauki o funkcjach. W świetle nowej reformy i nowej podstawy programowej należałoby zwrócić uwagę na kształtowanie pojęcia funkcji również w tych aspektach na poziomie szkoły ponadpodstawowej; (b) Rozwijanie *myślenia funkcyjnego* jest zagadnieniem, które powinno być realizowane w szkole podstawowej, a nawet na poziomie nauczania wczesnoszkolnego; (c) Kształcenie przyszłych nauczycieli matematyki powinno zostać zmodernizowane w tym zakresie tak, aby przyszli nauczyciele matematyki zostali zapoznani teoretycznie i praktycznie z różnymi aspektami pojęcia funkcji i sposobami rozwijania *myślenia funkcyjnego* u uczniów na różnych etapach edukacyjnych.

Abstract

This chapter presents various definitions and understandings of the term *functional thinking* and perceptions of activities related to developing *functional thinking* in students based on a review of current specialized literature, as well as on the preliminary empirical research that has been carried out. Five interviews were conducted with experts in the field of early childhood education, elementary school mathematics teaching and secondary school mathematics teaching who are teachers or academics conducting research in the field of mathematics education and training pre-service mathematics teachers at all the aforementioned levels. The analysis of the interviews showed how the experts understood functional thinking and what aspects of understanding the concept of function they emphasized as important. Three conclusions are worth presenting in this context: (a) Among other things, it turned out that secondary school experts did not pay attention to understanding functions as an input-output assignment or as dynamic process of covariation, which are characteristic of earlier stages of learning about functions. In light of the new reform and the new core curriculum, it would be appropriate to pay attention to the formation of the concept of function also in these aspects at the secondary school level; (b) The development of functional thinking is an issue that should be implemented in elementary school and even at the early elementary level; (c) The education of future mathematics teachers should be modernized in this regard so that future mathematics teachers are introduced theoretically and practically to various aspects of the concept of functions and ways to develop functional thinking in students at different educational stages.

Bez wątpienia pojęcie funkcji jest jednym z najważniejszych pojęć matematycznych w matematyce szkolnej oraz w zastosowaniach matematyki zarówno w innych przedmiotach szkolnych, jak i w innych naukach, w tym również do opisu zjawisk zachodzących w świecie rzeczywistym. Z tego względu analizie rozumienia pojęcia funkcji, trudnościom i przeszkodom epistemologicznym związanym z rozumieniem tego pojęcia przez uczniów (Sierpińska, 1992), a także rekomendacjom dotyczącym wprowadzania tego pojęcia w szkole poświęcono wiele opracowań naukowych i dydaktycznych na przestrzeni ostatnich dekad, a nawet stuleci. Zagadnieniom tym poświęciłam między innymi książkę *Pojęcie funkcji. Wiedza przedmiotowa nauczyciela matematyki* (Sajka, 2019), gdzie zarówno przedstawiłam pojęcie funkcji z punktu widzenia historyczno-epistemologicznego, jak i omówiłam wybrane procesy poznawcze towarzyszące kształtowaniu pojęcia funkcji u uczniów. Pojęcie funkcji w wyniku ostatniej reformy oświaty w 2019 roku zostało, jak wiadomo, przeniesione do realizacji z gimnazjum na poziom wyższy – do zreformowanej szkoły ponadpodstawowej i na tym poziomie uczniowie poznają zarówno definicję funkcji jako szczególnego przyporządkowania, jak i eksplorują intensywnie różne klasy funkcji. Można nawet stwierdzić, że zagadnienia poświęcone różnym rodzajom funkcji stanowią większość zagadnień programu nauczania szkoły ponadpodstawowej. Znajdujemy tam różne przyporządkowania nieliczbowe, służące wprowadzeniu definicji pojęcia funkcji, funkcje liczbowe, ciągi (nieliczbowe, liczbowe – a szczególnie arytmetyczne i geometryczne i różne sposoby ich opisu), klasy funkcji analitycznych (potęgowe, wielomianowe – w tym szczególnie eksplorowane liniowe i kwadratowe, wymierne – w tym homograficzne, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne) i ich szczegółowo omawiane własności oraz złożenia. Zauważmy również, że w programie nauczania szkoły ponadpodstawowej znajdziemy też funkcje w zupełnie innych kontekstach, co warto uświadomić uczniom, a wśród nich dla przykładu przekształcenia geometryczne, miary figur (pole, objętość), prawdopodobieństwo i inne.

Decyzję przesunięcia pojęcia funkcji do realizacji dopiero na poziomie szkoły ponadpodstawowej można wielostronnie analizować, z różnych perspektyw, porównywać z rozwiązaniami innych krajów i różnie oceniać. Można je uzasadniać w świetle złożonej natury kształtowania pojęcia funkcji u uczniów wspomnianą na wstępie. Natomiast na pewno należy zadać fundamentalne pytanie: Czy to oznacza, że powinniśmy wszystkie zagadnienia związane z pojęciem funkcji wprowadzać na poziomie szkoły ponadpodstawowej? Czy należy rozwijać wcześniej u uczniów tzw. *myślenie funkcyjne*? Czym jest *myślenie funkcyjne*? Na te pytania odpowiada dalsza część tego rozdziału.

NARODZINY TERMINU *MYŚLENIE FUNKCYJNE* I AKTUALNOŚĆ PROBLEMATYKI

Termin *myślenie funkcyjne* istnieje od około 130 lat w opracowaniach dotyczących edukacji matematycznej na świecie. W polskiej tradycji dydaktyki matematyki, zarówno w teorii, jak i w kształceniu nauczycieli matematyki ten termin jednak do niedawna nie istniał. Wprawdzie w roczniku naukowym *Dydaktyka Matematyki*, *13* pojawiła się jedna obszerna i ciekawa próba przeszczepienia na grunt dydaktyki polskiej terminu *myślenie funkcyjne* przez niemieckiego dydaktyka W. Rosenowa (1992) w artykule *O pewnych zagadnieniach kształtowania myślenia funkcyjnego w nauczaniu matematyki*, ale termin ten jednak nie został rozpowszechniony i wdrożony do praktyki kształcenia nauczycieli w Polsce; można stwierdzić, że nie przyjął się wówczas do terminologii polskiej dydaktyki matematyki.

Koncepcja *myślenia funkcyjnego* wywodzi się z badań nad rozwijaniem u dzieci pojęcia proporcjonalności (Inhelder, Piaget, 1958). Wszystkie źródła naukowe upatrują korzeni terminu *myślenie funkcyjne* bezpośrednio w osobie i spuściźnie matematyka Felixa Kleina, który jako pierwszy rozpowszechnił ten termin i apelował, aby *myślenie funkcyjne* traktować jako kluczowe w nauczaniu matematyki, zarówno na poziomie szkoły podstawowej, jak i średniej. Termin *myślenie funkcyjne* został zdefiniowany i użyty po raz pierwszy na konferencji w Meran w 1905 roku (Vollrath, 1986).

Jak podkreśla Rosenow:

> Pogląd ten znalazł odzwierciedlenie w tzw. Programie Merańskim reformy szkoły i w kolejnych programach nauczania matematyki opracowanych pod redakcją Kleina. Szczególnie w Niemczech miał on duży wpływ na rozwój dydaktyki matematyki. Okazało się również, że rozwój myślenia funkcyjnego nie tylko powinien być uwzględniony przy wyborze treści matematycznych i ich strukturowaniu, ale stanowi on istotne zagadnienie w badaniu procesu uczenia się matematyki. Jak wykazują przeprowadzone badania, problemy związane z rozwojem myślenia funkcyjnego nie zostały rozwiązane w zadowalający sposób. Świadczą o tym badania Stoye'a (1983), Helmholza (1981), Hausslera (1981) i von Hartena (1986). Badania prowadzone ostatnio w WSP w Güstrow ukazują to bardzo wyraźnie. Problem nie jest nowy, ale nadal aktualny, dlatego potrzebne są dalsze poświęcone mu badania. (Rosenow, 1992, s. 225)

To interesujące, że problem nie był nowy i był aktualny w 1992 roku, podobnie obecnie na świecie nie jest nowy i jest nadal aktualny. W Polsce sam termin można jeszcze uważać za nowy, jednak problematyka go obejmująca jest oczywiście znana i z różnym natężeniem eksplorowana, choć niektóre aspekty myślenia funkcyjnego są analizowane z użyciem innych terminów. O tym, że temat jest bardzo aktualny, świadczy na przykład to, że powstał międzynarodowy projekt Erasmus+ KA2 – *Cooperation for innovation and exchange of good practices* w kategorii partnerstw strategicznych dla uczelni wyższych *Enhancing functional thinking from primary to upper secondary school*, czyli o rozwijaniu myślenia funkcyjnego na różnych etapach edukacyjnych, w skrócie *FunThink*. W projekt zaangażowanych jest 8 uniwersytetów kształcących nauczycieli matematyki. Instytucją koordynującą jest Uniwersytet Pedagogiczny w Ludwigsburgu, a wśród partnerów są: Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Uniwersytet Pawła Józefa Šafárika w Koszycach, Uniwersytet Cypryjski, Uniwersytet Nauk Stosowanych i Pabo w Amsterdamie, Uniwersytet w Utrechcie oraz dwie niemieckie instytucje współpracujące: Uniwersytety w Koblencji-Landau oraz w Osnabrück. Informacje na temat projektu można znaleźć na stronie funthink.eu, a w języku polskim np. w: Sajka (2020).

Czym jest myślenie funkcyjne?

Myślenie funkcyjne jest definiowane na różne sposoby. Badacze traktują *myślenie funkcyjne* jako pewną zdolność i umiejętność, aktywność matematyczną. Poniżej przedstawiam wybrane definicje.

Vollath ujmuje tę aktywność krótko i w bezpośrednim odniesieniu do pojęcia funkcji:

> *Myślenie funkcyjne* jest **fundamentalną aktywnością związaną z pracą nad funkcjami** (ang. *for working on functions*). (Vollrath, 1986)

Kolejni autorzy podkreślają w swojej definicji oprócz bezpośredniego nawiązania do pojęcia funkcji również proces matematyzacji:

> *Myślenie funkcyjne* może być rozumiane jako **proces budowania, opisywania i przeprowadzania rozumowania z użyciem funkcji oraz o funkcjach**. (Blanton i in., 2015; Pittalis i in., 2020; *Vision Document*)

Freudenthal również nawiązuje do matematyzacji, ale nie wymienia wprost pojęcia funkcji, tylko formułuje definicję z użyciem terminu zależności:

> *Myślenie funkcyjne* to **zdolność do stwierdzania, postulowania, wytwarzania i odtwarzania zależności między zmiennymi**. (Freudenthal, 1983)

Rosenow definiuje ten termin podobnie, przytaczając definicję za dwoma innymi autorami, w której nawiązuje pośrednio do procesu matematyzacji, ale wymienia bardziej specyficzne aspekty pojęcia funkcji:

> Rozumiem *myślenie funkcyjne* jako **kompleks intelektualnych i matematycznych zdolności i umiejętności, który zawiera poznawanie, ujmowanie i stosowanie zależności zmian pewnej zmiennej od jednej lub kilku innych zmiennych** (Helmholz, 1981; von Harten, 1986). (Rosenow, 1992, s. 226)

W podobnym ujęciu Burton podkreśla konieczność etapu weryfikacji:

> *Myślenie funkcyjne* to **matematyczne myślenie o założeniach dotyczących zależności, które można sprawdzić, a w razie potrzeby zrewidować**. (Burton, 1984)

Inne opisy są bardziej specyficzne. Na przykład Smith (2008) i Markworth (2012) zwracają uwagę na aspekty użycia reprezentacji i uogólnienia, opisując

> *myślenie funkcyjne* jako **rodzaj myślenia reprezentacyjnego, które koncentruje się na zależnościach pomiędzy dwiema (lub więcej) różnymi wielkościami, w szczególności taki sposób myślenia, który prowadzi od konkretnych zależności (poszczególnych przypadków) do uogólnień tej zależności w różnych przypadkach.** (Smith, 2008, s. 143, tłumaczenie własne)

Smith (2008), przedstawiając swoje ramy teoretyczne dotyczące myślenia o algebrze i *myśleniu algebraicznym*, postulował, aby *myślenie funkcyjne* **stało się częścią algebraicznego procesu** wzbogacania naszego matematycznego doświadczenia.

W trochę szerszej interpretacji jawi się definicja sformułowana przez Cañadas:

> *Myślenie funkcyjne* **łączy się z matematycznymi pojęciami struktury, (współ)zmienności, zmiany i relacji, zależności. Dotyczy także idei zmiany jakościowej, zmiany ilo-**

ściowej, związków między tymi zmianami oraz wykorzystywania tych związków do rozwiązywania problemów. (Cañadas i in., 2016)

Twórcy tzw. *Vision document on Functional Thinking* projektu FunThink, do których autorka się również zalicza, podkreślają jeszcze ogólniejsze rozumienie tego terminu:

> *Myślenie funkcyjne* jest **sposobem myślenia o relacjach, współzależnościach i zmianach**.

W tym ostatnim ujęciu jest ono kluczowe dla społeczeństwa. Jest ono potrzebne nie tylko podczas pracy nad wielorakimi problemami z innych dyscyplin i dziedzin (np. w naukach przyrodniczych, geografii, naukach społecznych), ale także w życiu zawodowym człowieka (np. związanym z naukami ścisłymi, ekonomią, medycyną lub psychologią). *Myślenie funkcyjne* jest również kluczowe w życiu codziennym. Musi być uruchomione choćby przy modelowaniu i rozumieniu modelów, na przykład rozprzestrzeniania się wirusa, takiego jak COVID-19, czy przy monitorowaniu spłaty kredytu bankowego. Niestety istnieje wiele badań dydaktycznych i dowodów empirycznych na to, że *myślenie funkcyjne* sprawia uczniom ogromne trudności na wszystkich poziomach matematycznego kształcenia. To z kolei może mieć dalsze poważne konsekwencje, może rodzić szersze niepowodzenia szkolne, a także negatywnie rzutować na późniejsze uczestnictwo w życiu społecznym i zawodowym.

Cztery aspekty rozumienia pojęcia funkcji

Wraz z rozwojem badań nad edukacją matematyczną definicje *myślenia funkcyjne*go stawały się coraz bardziej zróżnicowane, ale niektóre z nich bezpośrednio odnosiły się do aspektów, w których można rozumieć pojęcie funkcji. Na przykład ujęcie czynnościowo-operacyjne podkreśla operacyjny i obliczeniowy charakter pojęcia funkcji i traktuje funkcję jako regułę wejścia/wyjścia. Ujęcie dynamiczne podkreśla współzmienność zmiennej zależnej ze zmienną niezależną lub dwóch zmiennych zależnych od innej zmiennej. Bardziej statyczny pogląd, w tym pogląd zawierający ideę „mapping" prowadzi do bardziej formalnej definicji funkcji jako zbioru par uporządkowanych, czyli funkcji jako obiektu matematycznego. Ponadto na różnych poziomach edukacyjnych definicje tego, czym jest funkcja, są zróżnicowane.

Jak opisano wyżej, *myślenie funkcyjne* obejmuje proces opisywania, budowania i rozumowania na temat funkcji lub za pomocą funkcji (Pittalis i in., 2020; Stephens i in., 2017), taktując funkcję w różnych aspektach. Zgodnie z inną literaturą (np. Doorman i in., 2012; Pittalis i in., 2020) i sformułowaniami ujętymi w *Vision document on Functional Thinking* projektu FunThink wyróżniamy następujące główne poglądy na funkcję, podając opis i tłumaczenie własne oraz oryginalną nazwę w języku angielskim:

1) Funkcja jako reguła przypisania wejścia-wyjścia (*Function as an input-output assignment*)

Myślenie o funkcji jako maszynie wejścia-wyjścia polega na odkrywaniu lub badaniu reguły, na podstawie której wartość wejściowa ulega zmianie i otrzymujemy wartość wyjściową. Ten pogląd podkreśla operacyjny i obliczeniowy charakter pojęcia funkcji, dostosowanie się do konkretnych zasad, korzystanie ze wzorów oraz działanie według przepisu.

2) Funkcja jako dynamiczny proces współzmienności *(Function as a dynamic proces of covariation)*

Myślenie o funkcji jako dynamicznym procesie współzmienności polega na jednoczesnej zmianie dwóch lub więcej zmiennych, nacisk jest położony na współzmienność zmiennej zależnej i zmiennej niezależnej. Nawiązuje do pracy Thompsona i Carlson (2017) na temat rozumowania współzmiennościowego, gdzie funkcja jest postrzegana jako „dwie wielkości zmieniające się jednocześnie w taki sposób, że istnieje niezmienniczy związek między ich wartościami, który ma tę własność, że w percepcji danej osoby każda wartość jednej wielkości określa dokładnie jedną wartość drugiej” (Thompson, Carlson, 2017, str. 436). Zmienna niezależna, przebiegając przez źródłowy zbiór, powoduje, że zmienna zależna przebiega przez zbiór wartości, czyli obserwujemy, jak zmieniają się argumenty oraz elementy zbioru wartości w tym samym czasie. Pogląd ten dobrze obrazuje np. wykres zależności przebytej drogi od mijającego czasu, na którym możemy śledzić jednoczesne zmiany obu zmiennych, im więcej czasu upłynie, tym większy dystans pokona dane ciało.

3) Funkcja jako relacja przyporządkowania (*Function as a correspondence relation*)

Myślenie o funkcji jako relacji przyporządkowania polega na rozumieniu relacji, jaka występuje między zmienną niezależną i zmienną zależną oraz umiejętności jej reprezentowania. Pogląd ten może prowadzić do bardziej formalnej definicji funkcji jako zbioru par uporządkowanych.

4) Funkcja jako obiekt matematyczny (*Function as a mathematical object*)

Myślenie o funkcji jako o obiekcie matematycznym polega na przypisaniu jej własnej reprezentacji i własności. Obiekt ten może być porównywany z innymi obiektami matematycznymi lub funkcjami. Patrzenie na funkcję z tej perspektywy jest związane z badaniem własności funkcji, rozróżnianiem i charakterystyką różnych klas funkcji, operacji na funkcjach oraz znajomości samej definicji funkcji i pojęć z nią związanych. Funkcja jest tu postrzegana jako członek rodziny funkcji i może być poddana procesom wyższego rzędu, takim jak sumowanie, składanie, całkowanie, różniczkowanie itp.

Cztery powyższe perspektywy myślenia o funkcjach są ze sobą ściśle powiązane i czasem trudno jednoznacznie przyporządkować czyjś sposób pojmowania funkcji tylko do jednego poglądu. Ponadto mają one taksonomiczny charakter, ponieważ kolejność, w jakiej są podane, ukazuje stopniowy rozwój – od zasad i reguł (funkcja jako reguła przypisania wejścia-wyjścia) po strukturalne ujęcie funkcji jako obiektu matematycznego. Niemniej te cztery aspekty stanowią fundament dla układania zadań i rozwijania myślenia funkcyjnego.

METODOLOGIA BADAŃ

Celem badań było poznanie i analiza perspektywy ekspertów na temat *myślenia funkcyjnego* i jego rozwijania, w szczególności interesowały nas odpowiedzi na kilka pytań badawczych. W bieżącym opracowaniu skoncentrujemy się na odpowiedziach na następujące pytanie badawcze: **Jak ekspert rozumie termin *myślenie funkcyjne* i do jakich aspektów pojęcia funkcji ekspert nawiązuje oraz jakie podane przykłady aktywności uważa za istotne w rozwijaniu *myślenia funkcyjnego* u uczniów?**

W ramach eksploracyjnego podejścia jakościowego **metodą badawczą** były częściowo ustrukturyzowane wywiady otwarte pogłębione. Struktura wywiadu zbudowana była z dwóch głównych pytań i jedenastu pytań pomocniczych, uzupełniających, w celu uzyskania jak najobszerniejszych odpowiedzi. Pytania badawcze i struktura wywiadu zostały ustalone w ramach *interview study* przeprowadzonego w międzynarodowym zespole badawczym projektu FunThink, którego autorka jest członkiem. Bieżące opracowanie dotyczy wywiadów przeprowadzonych w Polsce.

Wśród polskich pięciu **uczestników badania** znaleźli się zarówno nauczyciele nauczania matematyki w szkole podstawowej i ponadpodstawowej oraz pracownicy naukowo-dydaktyczni prowadzący badania z zakresu edukacji matematycznej oraz kształcący przyszłych nauczycieli matematyki na wszystkich poziomach edukacyjnych – również na poziomie wczesnoszkolnym i przedszkolnym. Grupa badawcza została przedstawiona w tabeli 1. Próba była heterogeniczna w ramach eksploracyjnego podejścia jakościowego.

Tabela 1. Próba badawcza

	Ekspert 1	Ekspert 2	Ekspert 5	Ekspert 6	Ekspert 7
Płeć	Kobieta	Mężczyzna	Kobieta	Kobieta	Kobieta
Wiek	54 lata	31 lat	59 lat	46 lat	54 lata
Doświadczenie w nauczaniu matematyki	30 lat	6 lat	30 lat	20 lat	30 lat
Obecne stanowisko pracy	Nauczyciel szkoły ponadpodstawowej	Nauczyciel szkoły ponadpodstawowej; nauczyciel akademicki dydaktyk matematyki szkoły ponadpodstawowej	Nauczyciel akademicki dydaktyk matematyki w zakresie nauczania matematyki uczniów w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym	Nauczyciel szkoły ponadpodstawowej	Nauczyciel szkoły podstawowej

W dalszej części artykułu przyjmujemy oznaczenia wypowiedzi ekspertów jako kolejno E1, E2, E5, E6, E7. Eksperci z numerami 4 i 5 byli fizykami i ich wypowiedzi nie poddajemy analizie w niniejszym opracowaniu, ze względu na przyjętą w tym rozdziale perspektywę nauczania matematyki.

Wywiady częściowo ustrukturyzowane zostały przeanalizowane przy użyciu **jakościowej analizy treści** (Mayring, 2015), co umożliwiło zarówno podejście indukcyjne, jak i dedukcyjne. Wywiady były długie (niektóre trwały nawet 1,5 godziny) i dostarczyły obszerny materiał badawczy. W niniejszym opracowaniu wypowiedzi ekspertów poddano analizie wyłącznie pod kątem ujawnienia głównych aspektów myślenia funkcyjnego, zaprezentowanych powyżej, które stanowią ramy teoretyczne podejścia dedukcyjnego. Kody służące analizie materiału badawczego zostały wypracowane przez międzynarodową grupę badawczą *interview study* projektu FunThink, którego autor tej publikacji jest członkiem. Tabela 2 przedstawia pierwsze kody nawiązujące do czterech aspektów rozumienia funkcji. Kodowanie wypowiedzi ekspertów dokonane było przez autora tej publikacji, ale także wstępnego kodowania dokonywała ówczesna magistrantka Anna Dziura w ramach realizacji swojej pracy magisterskiej pod kierunkiem autorki (Dziura, 2022). Dyskusje nad kodowaniem zwiększały obiektywizm ustalonych kodów. Niezależnego kodowania dokonała następnie Edyta Nowińska (Uniwersytet w Osnabrück), również będąca członkiem wspomnianej międzynarodowej grupy badawczej. Na koniec w przypadkach rozbieżnych kodów, w wyniku dyskusji, ustalono jednolite kodowanie.

Tabela 2. Kody związane z czterema aspektami rozumienia pojęcia funkcji (*interview study*, projekt FunThink)

	1. Aspekty myślenia funkcyjnego
Perspektywy myślenia funkcyjnego/myślenia o funkcjach	1.1. Funkcja jako reguła przypisania wejścia-wyjścia (*Function as an input-output assignment*)
	1.2. Funkcja jako dynamiczny proces współzmienności (*Function as a dynamic process of covariation*)
	1.3. Funkcja jako relacja przyporządkowania (*Function as a correspondence relation*) 1.3.1. Ukierunkowana zależność 1.3.2. Nieukierunkowana zależność *W przypadku, gdy rozmówca nie określi jednoznacznie zależności ukierunkowanej lub nieukierunkowanej, należy wybrać podkategorię 1.3.*
	1.4. Funkcja jako obiekt matematyczny (*Function as a mathematical object*) 1.4.1. Badanie ogólnych własności funkcji (np. monotoniczność), również po jej uprzednim sparametryzowaniu 1.4.2. Zrozumienie i radzenie sobie z różnymi klasami funkcji (np. wyjaśnienie relacji pomiędzy różnymi klasami funkcji, jak np. wielomian, a funkcja liniowa, kwadratowa) 1.4.3. Wykonywanie i reprezentowanie operacji na funkcjach (sumowanie, całkowanie, różniczkowanie, przekształcenia wykresów funkcji) 1.4.4. Wymienienie jedynie ogólnej definicji funkcji lub samego pojęcia funkcji

WYNIKI BADAŃ

Tabela 3 prezentuje zestawienie danych zebranych na podstawie wyników badań. Liczby przedstawione w niej oznaczają liczbę wypowiedzi poszczególnych ekspertów ujawniających odpowiednie kategorie. Litera „x" oznacza, że kategoria główna została poruszona przez eksperta, ale wypowiedź, o której mowa, została przypisana do jednego spośród kodów 1.3.1, 1.3.2, 1.4.1‑1.4.4. Symbolem „‑" oznaczono kategorie, które nie zostały ujawnione w danym wywiadzie.

Tabela 3. Aspekty pojęcia funkcji ujawnione podczas wywiadów z ekspertami

	Ekspert 1	Ekspert 2	Ekspert 5	Ekspert 6	Ekspert 7
1.1.	-	8	4	-	3
1.2.	-	-	11	1	4
1.3.	4	x	x	1	x
1.3.1.	-	-	1	-	-
1.3.2.	1	1	-	-	1
1.4.	5	1	-	4	2
1.4.1.	-	5	-	-	3
1.4.2.	1	3	-	-	-
1.4.3.	1	2	-	-	1
1.4.4.	-	-	-	-	-

Ekspert 1 powiązał *myślenie funkcyjne* z inną interpretacją, nie łączył tego terminu z pojęciem funkcji w ujęciu matematycznym:

> Dla mnie to jest tak, że tworzę sobie definicję i do tej definicji dobudowuję pewne rzeczy […]. I na tym coś szerzej […] buduję. E1_2

Rozumienie *myślenia funkcyjnego* jako myślenia o rolach (funkcjach), jakie mogą pełnić różne pojęcia matematyczne, ekspert obszernie opisał w swoich siedmiu wypowiedziach. Jeśli chodzi o pojęcie funkcji, to najwięcej uwagi poświęcił funkcji jako obiektowi matematycznemu (kod 1.4), o której wspominał w siedmiu różnych kontekstach. Ekspert przedstawiał funkcję również jako relację przyporządkowania, podając do niej pięć przykładów. Jako jedyny spośród wszystkich ekspertów podał przykład odwołujący się do rachunku prawdopodobieństwa:

> Mnie się tu na przykład kojarzy rachunek prawdopodobieństwa… Wykonujemy jakieś doświadczenie… rzut to jest suma oczek na kostce, […] dziesięć, dwadzieścia rzutów wykonujemy w doświadczeniu i możemy się zastanawiać, […] jakie wartości będziemy mieć, jakie się powtarzają, a jakie nie. Jaki jest zbiór wartości, bo dziedzina jest narzucona. Mówimy, ile razy chcemy wykonać rzut […], więc takie […] funkcje to są uporządkowane pary. Konkretnej liczbie… przyporządkowuję coś konkretnego. E1_15

Nie jest zaskakujące to, że E1 skupił uwagę na aspekcie 1.3 i 1.4, ponieważ jest nauczycielem w elitarnej szkole ponadpodstawowej. Jednak należy zwrócić uwagę, że dwa pierwsze aspekty rozumienia pojęcia funkcji w ogóle nie zostały wspomniane, E1 podczas wywiadu nie ujawnił postrzegania funkcji jako reguły przypisania wejścia-wyjścia (kod 1.1) ani jako dynamicznego procesu współzmienności (kod 1.2) i nie podał przykładów aktywności uczniów, które mogą rozwijać te aspekty rozumienia pojęcia funkcji.

Ekspert 2 szczególnie entuzjastycznie nawiązywał do funkcji jako obiektu matematycznego (kod 1.4), podając aż jedenaście różnorodnych przykładów w swojej wypowiedzi, na przykład:

> […] oczekiwanym efektem byłoby dla mnie to, że… jeżeli mam do czynienia z jakąkolwiek funkcją, to… potrafię ją „obsłużyć”, że tak to ujmę. Niezależnie od sytuacji, kontekstu i tego, co to konkretnie jest za obiekt. E22

Dużą uwagę skupił na funkcji jako regule wejścia-wyjścia (kod 1.1) – wielokrotnie używał terminów, takich jak reguła, zasada czy wzór. W swoich ośmiu wypowiedziach na ten temat podawał przykłady bardzo zróżnicowane tematycznie, nawiązując do różnych sytuacji, np.:

> Myślę, że przede wszystkim zabawy z wykałaczkami, na przykład budowa kwadratu, domków i tak dalej, dokładanie kolejnych, więc w zasadzie ciągi, ale bez nomenklatury. E2_12

> […] tworzę jakby komórkę, trochę jak Excel, może też tworzenie dokumentów właśnie, plików w Excelu jest dobre, bo to pokazuje, że jeżeli odwołam się do jakiejś komórki, to nagle wszystkie moje miejsca, w których się odwołuję, zmieniają się. E2_17

E2 odwoływał się do funkcji jako przyporządkowania:

> […] staraliśmy się wiązać ze sobą różne… obiekty z różnych zbiorów… w jakiś sposób, na przykład ludzi z PESEL-ami, z numerami z dziennika, z numerami telefonów albo autorów książek i tak dalej, i tak dalej, i sprawdzać w różnych sytuacjach, czym te relacje będą się różnić. To znaczy, że na przykład jedną książkę mogło napisać kilka osób, więc takie przyporządkowanie będzie inne niż przyporządkowanie numeru PESEL do osoby, bo taki jest tylko jeden, ale też inaczej będzie z telefonami komórkowymi, bo… niekoniecznie jedna osoba to jeden telefon […]. E2_15

Warto zwrócić uwagę, że E2 również nie podniósł wszystkich aspektów myślenia funkcyjnego i również jako nauczyciel w elitarnym liceum nie odniósł się w sposób bezpośredni do aspektu współzmiennościowego pojęcia funkcji.

Ekspert 5 podaje następującą definicję myślenia funkcyjnego:

> Nie wiem, czy istnieje jakaś definicja myślenia funkcyjnego, bo na pewno dla mnie, z tego punktu widzenia, że jestem matematykiem, kojarzy się z pojęciem funkcji – z obserwowaniem pewnych zależności związanych z tym, jak jest funkcja określona, w jaki sposób, jaki jest zbiór argumentów i zbiór wartości. Można patrzeć na to, jak zmieniają się wartości w zależności od argumentu i w zależności od przepisu funkcji, bo dla każdej funkcji te zależności będą inne i będą występowały inne zmiany – tym jest dla mnie funkcja. […] wydaje mi się, że chodzi o umiejętność dostrzegania tych zależności, umiejętność dostrzegania związków między właśnie pewnymi zmiennymi, jak jedne zmienne wpływają na inne. E52

E5 zdecydowanie skupił się na funkcji jako dynamicznym procesie współzmienności (kod 1.2), powracając w swoich przykładach do tego aspektu aż 11 razy, a w trochę mniejszym stopniu na funkcji jako regule przypisania wejścia-wyjścia (kod 1.1). Analizując wypowiedzi eksperta, widać, że przykłady współzmienności (kod 1.2) podawane przez niego są adekwatne do nauczania młodszych dzieci, dla przykładu:

> [Możemy] rozważać sytuacje, w których pojawia się funkcja. Zresztą wydaje mi się, że matematyka przepełniona jest takimi funkcjami. Zacznijmy od zwykłych doświadczeń dzieci w przedszkolu. Dzieci uczą się rozumienia objętości i pewnych zależności związanych z przelewaniem i wlewaniem wody. Jest butelka, do której wlewają wodę, wkładają do butelki lejek i wlewają jedną filiżankę wody czy jeden kubek wody i patrzą, dokąd sięga woda. Muszą zaznaczyć poziom wody, wlewają drugi kubek wody i znowu zaznaczają poziom, wlewają trzeci. **Wraz z liczbą wlanych kubków wzrasta poziom wody** i tu dzieci mogą dostrzegać zależność – im więcej kubków wleją, tym większy poziom wody. I proces odwrotny – mogą wylewać wodę z butelki, wyleją jeden kubek wody, a wtedy poziom się obniży i tak dalej. I w taki sposób mogą to zaobserwować. E5_3

Przykłady E5 z kategorii 1.1 nawiązują głównie do tabelek i maszynek funkcyjnych, które również kierowane są do dzieci nieznających jeszcze pojęcia funkcji. Dla przykładu:

> Natomiast, żeby tabelki [funkcyjne] rzeczywiście były dla dzieci przystępne i zrozumiałe, to można im zaproponować zabawę: mamy urządzenie, maszynę, może być robot, który przetwarza liczby, może to być maszynka liczbowa, można też jakieś pudełko, do którego wrzucamy liczby, a na taśmie wpisujemy wyniki. Tak się można z dziećmi bawić. Mówimy, że wkładamy do maszyny powiedzmy liczbę dwa, a wyjmujemy liczbę… pięć. Albo włożymy do maszyny liczbę siedem, a wyjmiemy trzynaście. Jak… Trzeba tych przykładów przynajmniej trzy, żeby się dało zauważyć regułę postępowania maszyny, mechanizm jej działania. Dzieci mogą ją odkryć i sformułować wniosek: „maszyna dodaje trzy". A teraz zapiszmy sposób działania maszyny. Jeśli wchodzi jakaś konkretna liczba, to jaką wyjmujemy? Zapisujemy to, najlepiej, w tabeli. I w jakiś sposób zakodować wejście, wyjście i pod spodem zaznaczyć zasadę działania maszyny. Z maszynką funkcyjną można robić różne rzeczy, bo chcemy wiedzieć, co wkładamy i co wyjmujemy… Chcemy znać zasadę działania, a uczniowie mają przewidywać, jaki będzie wynik działania. E5_30

Oba te aspekty pojęcia funkcji w ujęciu E5 skierowane są do nauczania na poziomie przedszkolnym i wczesnoszkolnym. E5 podał ponadto przykład funkcji jako przyporządkowania i jako jedyny w tym kontekście był to przykład ukierunkowanej zależności (kod 1.3.1). E5 w swoich wypowiedziach nie nawiązywał do funkcji jako obiektu matematycznego. Wynika to z tego, że E5 zajmuje się dydaktyką matematyki na poziomie edukacji przedszkolnej i wczesnoszkolnej, a zatem wywiad dotyczył tylko tego etapu edukacyjnego. Na tym poziomie funkcje nie są wprowadzane, ale myślenie funkcyjne jest rozwijane u uczniów w formie zabaw i zagadek, odkrywania prostych reguł i zależności.

Ekspert 6 postrzega funkcję głównie jako obiekt matematyczny (kod 1.4), podał cztery wypowiedzi na ten temat. Natomiast E6 nawiązał również do aspektów funkcji jako relacji współzmiennościowej i jako przyporządkowania, podając po jednym przykładzie:

> Obniżka… [hurtownik] zauważył, że obniżka o jeden złoty powoduje na przykład, że sprzedaż wzrasta o jedną sztukę, tak? Jaką powinien ustalić cenę, żeby jego zysk był maksymalny? E6_6 (1.2
>
> […] czasami każę im przygotować jakieś właśnie przyporządkowania – dużo różnych przykładów. I potem dyskutujemy, czym różnią się podawane przez nas przykłady i […] rozdzielamy na grupy. …zadaję pomocnicze pytania i wtedy oni widzą, że pewne… przyporządkowania, które podali, różnią się od siebie i właśnie bazując na danych przykładach, dopiero wprowadzamy definicję… definicję funkcji. E6_35 (1.3)

Ekspert 6 jako nauczyciel w liceum nie poruszył natomiast bezpośrednio kategorii 1.1.

Ekspert 7 odniósł się do wszystkich aspektów myślenia funkcyjnego, a uwagę skupił głównie na funkcji jako obiekcie matematycznym:

> Myślę, że myślenie funkcyjne jest [potrzebne] do oswajania funkcji, prawda? W ogóle, jako pojęcia funkcji. E7_18

Dla funkcji jako reguły wejścia-wyjścia E7, podobnie jak E5, jako nauczyciel szkoły podstawowej powoływał się na tabelki funkcyjne:

> […] w klasie czwartej jest bardzo dużo zadań na zasadzie takich tabelek. W tabelkach uczniowie przechodząc na przykład z dołu do góry, czyli z dolnego wiersza do górnego, dzielą liczby przez dziesięć, jeśli z górnego wiersza do dolnego, to wtedy na przykład mnożą je przez dziesięć. Albo dodają, albo odejmują. E7_4

E7 podawał również przykłady funkcji jako dynamicznego procesu współzmienności w różnych kontekstach, np. w kontekście fizycznym:

> […] rozwiązywanie zadań, w których pokazuje się zależności, na przykład szczególnie w klasie szóstej pracuje się z prędkością, z drogą i czasem. Wprawdzie nie wprowadza się wzoru fizycznego na prędkość, drogę i czas, tylko pracuje się intuicyjnie. Czyli… uczenie ich, że jak prędkość rośnie, to możemy na przykład jechać krócej? Albo jak też rośnie czas podróży, to przejeżdżamy na tej samej prędkości dłuższy odcinek drogi. Można też uczyć takich zależności, że właśnie między prędkościami a drogą lub prędkością a czasem występują jakieś zależności, że jedno ściśle wiąże się z drugim, że te elementy są ze sobą powiązane. E7_36

E7 przedstawiał funkcję również jako relację przyporządkowania i nieukierunkowaną zależność (podając przykład z PESEL-ami i imionami uczniów).

WNIOSKI

Eksperci dostarczyli bogatego materiału na temat rozumienia terminu *myślenie funkcyjne* i przedstawili swoje propozycje rozwijania *myślenia funkcyjnego* u uczniów. Ze względu na ograniczoną objętość niniejszego rozdziału, w skrótowy sposób przedstawiam główne wnioski wynikające z badań analizowanych jedynie z punktu widzenia ujawnienia czterech aspektów rozumienia pojęcia funkcji.

Termin *myślenie funkcyjne* jest intuicyjnie rozumiany przez ekspertów w wybranych aspektach, chociaż żaden z nich takiego terminu **nie znał bezpośrednio**. Jeden spośród pięciu ekspertów nie powiązał w ogóle myślenia funkcyjnego z funkcjami, tylko z rolami, jaką dane pojęcia mają pełnić w poszczególnych, różnych kontekstach. A zatem eksperci, nie znając wprost terminu *myślenie funkcyjne*, poddali go analizie lingwistycznej, a wobec dwuznaczności w języku polskim słowa „funkcja" pojawiło się skojarzenie niezwiązane z pojęciem matematycznym.

Nie wszystkie aspekty rozumienia pojęcia funkcji były przywołane przez wszystkich ekspertów. Aspekt funkcji jako przyporządkowania pojawił się jako jedyny we wszystkich wypowiedziach ekspertów. Prawdopodobnie jest to związane z przyjętą w szkole definicją funkcji jako szczególnego przyporządkowania. Dwóch ekspertów w zakresie nauczania na poziomie szkoły ponadpodstawowej nie przywołało aspektu związanego z regułą wejścia-wyjścia (1.1) i podobnie dwóch nie przywołało aspektu związanego z rozumowaniem współzmiennościowym (1.2). Te dwa aspekty pojęcia funkcji mogą i powinny pojawić się na etapie propedeutyki pojęcia funkcji oraz na początku nauki o funkcjach i nie zostały przywołane przez ekspertów z zakresu szkoły ponadpodstawowej. Należałoby zbadać, czy jest to sytuacja przypadkowa, czy jednak niosąca ważniejsze wnioski. Być może nauczyciele szkół ponadpodstawowych jeszcze nie do końca przygotowali się do wprowadzenia pojęcia funkcji według nowych podstaw programowych, czyli w szkole ponadpodstawowej i nie zrewidowali nauczania pojęcia funkcji po reformie. Jeden ekspert nie przywołał funkcji jako obiektu matematycznego, co miało związek z wczesnoszkolnym etapem edukacyjnym, na którym jest ekspertem.

Zdecydowana większość ekspertów (czworo spośród pięciu) skupiła się na funkcji jako obiekcie matematycznym (kod 1.4), a tylko jeden z nich postrzega funkcję głównie jako dynamiczny proces współzmienności (1.2). Jest to uzasadnione, ponieważ jako jedyny pracuje z uczniami na poziomie edukacji wczesnoszkolnej, gdzie funkcje nie są jeszcze wprowadzane. Udowadnia to następny wniosek: Rozwijanie *myślenia funkcyjnego* jest zagadnieniem, które powinno być realizowane w szkole podstawowej, a nawet na poziomie nauczania wczesnoszkolnego. Kształcenie przyszłych nauczycieli matematyki powinno zostać zmodernizowane w tym zakresie. Przyszli nauczyciele matematyki powinni zostać zapoznani teoretycznie i praktycznie z różnymi aspektami pojęcia funkcji i tym, w jaki sposób można rozwijać *myślenie funkcyjne* u uczniów na różnych etapach edukacyjnych. Obecnie działania w tym kierunku są podejmowane na Uniwersytecie Pedagogicznym w Krakowie, gdzie miałam możliwość prowadzenia już drugi raz kursu do wyboru dla przyszłych nauczycieli „Rozwijanie myślenia funkcyjnego u uczniów". W tym kierunku działa również wspomniany projekt FunThink, w którym opracowujemy nie tylko lekcje mające na celu rozwijanie myślenia funkcyjnego u uczniów, jak i właśnie kursy dla przyszłych nauczycieli i dla nauczycieli praktyków chcących zgłębiać teorię i nieustających w doskonaleniu własnego warsztatu pracy.

Ogłoszenie

Artykuł powstał dzięki wsparciu międzynarodowego projektu FunThink w ramach programu Erasmus+ (2020-1-DE01-KA203-005677).

BIBLIOGRAFIA

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *5*(1), 35–49.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87–103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*, 1243–1267.

Dziura, A. (2022). *Myślenie funkcyjne w ujęciu ekspertów – studium przypadków*. Praca magisterska napisana w IM UP pod kierunkiem M. Sajki.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Springer.

Haussier, P. (1981). *Denken und Lernen Jugendlicher beim Erkennen funktionaler Beziehungen*. Bern, Stuttgart, Vien: Verlag Hans Weber.

Helmholz, C. P. (1981*). Funktionale Betrachtungen und Entwicklung fachspezifischen Könnens im Mathematikunterricht der Klassen 6–10*. Leipzig: Karl-Marx Universität.

Inhelder, B., Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures*, t. 22. Psychology Press.

Markworth, K. A. (2012). Growing patterns: seeing beyond counting. *Teaching Children Mathematics*, *19*(4), 254. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.19.4.0254

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. W: *Approaches to qualitative research in mathematics education* (s. 365–380). Springer, Dordrecht.

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(5), 631–674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Rosenow, W. (1992). O pewnych zagadnieniach kształtowania myślenia funkcyjnego w nauczaniu matematyki. *Dydaktyka Matematyki*, *13*(1992), 225–252.

Sajka, M. (2019). *Pojęcie funkcji*. Kraków: Wydawnictwo Naukowe UP.

Sajka, M. (2020). Rozwijanie myślenia funkcyjnego na wszystkich etapach matematycznego kształcenia w ramach projektu unijnego „FunThink". *Commentarii Academici*, 56–58.

Sierpińska, A. (1992). On understanding the notion of function. W: E. Dubinsky, G. Harel (red.), *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology. Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America*, *25*(1992), 25–58.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. W: J. L. Kaput, D. W. Carraher, M. L. Blanton (red.), *Algebra in the early grades* (s. 133–160). Taylor and Francis Group.

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143–166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Stoye, W. (1983). Vas wissen unsere Schüler vom Funktionsbegriff? Ergebnisse einer Schülerbefragung; Wiss. *Zeitschrift Funktio nales Danken*, *32*(1).

Thompson, P. W., Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. W: J. Cai (red.), *The Compendium for Research in Mathematics Education* (s. 421–456). The National Council of Teachers of Mathematics.

Vollrath, H. J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(4), 387–400. https://doi.org/10.1007/BF00311326

von Harten, G. (1986). *Funkt ionsbegriff und funktionales Denken* (IDM – t. 11). Köln: Auslis-Verlag Deubner.

Vision Document on Functional Thinking: https://www.funthink.eu/fileadmin/user_upload/io1_vision_document_version_2.0.pdf

Jestem, więc myślę – wnioski z badań na temat myślenia matematycznego

Edyta Juskowiak

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
edyta@amu.edu.pl
ORCID: 0000-0002-5114-4210

Joanna Mleczak

Szkoła Podstawowa nr 43 z Oddziałami Integracyjnymi im. Jana Kaczmarka we Wrocławiu
j.mleczak@puszkin.eu
ORCID: 0009-0006-5481-217X

Streszczenie

O myśleniu matematycznym pisze się, że to umiejętność wykorzystania narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym. W innym miejscu czytamy, że myślenie matematyczne to dynamiczny proces, który rozszerza nasze rozumienie, ponieważ pozwala nam radzić sobie z coraz bardziej złożonymi ideami. Myślenie matematyczne na pewno jest sposobem pojmowania świata, jego elementów i relacji między nimi. Jest szczególnie ważną umiejętnością w świecie XXI wieku, gdzie praktycznie każdy może aspirować do wysokich pozycji w biznesie czy w polityce. Myślenie analityczne jest wysoko cenione wszędzie tam, gdzie jest mowa o sukcesie, przywództwie, dużych pieniądzach i władzy. Okazuje się jednak, że płynne przejście z mechanicznego wykonywania operacji matematycznych do prawdziwie matematycznego myślenia wielu osobom sprawia spore problemy. Celem badań opisanych w pracy jest próba zbadania i opisania poziomu myślenia formalnego u studentów pierwszego roku studiów licencjackich oraz maturzystów na podstawie analizy procesu rozwiązania otwartych zadań matematycznych – trzech algebraicznych i jednego z logiki. W obrębie każdego z zadań znajdowało się miejsce na rozwiązanie, uzasadnienie swojej odpowiedzi oraz uwagi dotyczące zadania. Wyniki oraz wnioski z badań stanowią podstawę do dyskusji na temat właściwej organizacji procesu uczenia się-nauczania, w której nauczyciel powinien trwale prowokować swoich uczniów, i to bez względu na wiek, do otwartości oraz gotowości do rozwiązywania zadań nieszablonowych, do uzasadniania swoich sądów, refleksji nad przeprowadzonym rozumowaniem czy też do zadawania pytań.

Abstracts

Mathematical thinking is defined as the ability to use the tools of mathematics in everyday life and to formulate judgments based on mathematical reasoning. Elsewhere, we read that mathematical thinking is a dynamic process that expands our understanding as it allows us to deal with increasingly complex ideas. Mathematical thinking is certainly a way of understanding the world, its elements and the relationships between them. This is a particularly important skill in the world of the 21st century, where practically everyone can aspire to high positions in business or politics. Analytical thinking is highly valued wherever there is talk of success, leadership, big money and power. It turns out, however, that the smooth transition from the mechanical performance of mathematical operations to truly mathematical thinking causes many problems for many people. The aim of the research described in the work is an attempt to examine and describe the level of formal thinking in first-year undergraduate students and high school graduates based on the analysis of the process of solving open mathematical tasks – three algebraic and one in logic. Within each of the tasks, there was space for a solution, justification for your answer and comments on the task. The results and conclusions of the research are the basis for discussion on the proper organization of the learning-teaching process, in which the teacher should permanently provoke his students, regardless of age, to be open and ready to solve unconventional tasks, justify their opinions, reflect on reasoning or ask questions.

TEORETYCZNE PODSTAWY PRACY

Myślenie matematyczne

XXI wiek to czas szybkiego rozwoju technologicznego, informatycznego, komunikacyjnego, jest to przede wszystkim czas rozwoju opartego na wiedzy. Potrzeby środowiska społeczno-gospodarczego wytyczają współczesnym szkołom i uczelniom kierunek kształcenia. Koniecznie należy słuchać tego głosu, aby nie spóźnić się z wdrożeniem zmian do procesu uczenia się-nauczania.

Tony Wagner, uznany na całym świecie ekspert w dziedzinie edukacji, wieloletni pracownik Uniwersytetu Harvarda, nauczyciel szkoły średniej, dyrektor, profesor uniwersytecki w zakresie kształcenia nauczycieli, częsty prelegent na krajowych i międzynarodowych konferencjach, autor dwóch bestselerowych publikacji *Creating Innovators* oraz *The 7 Survival Skills for Work, Learning, and Citizenship in the 21st Century* zwraca uwagę na siedem kompetencji, jakie potrzebne są dziś uczniowi, aby stać się skutecznym i efektywnym obywatelem świata XXI wieku.

Są nimi:

- Rozwiązywanie problemów i myślenie krytyczne.
- Współpraca w różnych grupach.

- Umiejętność adaptacji do nowych warunków.
- Inicjatywa i przedsiębiorczość.
- Efektywna komunikacja – pisemna i ustna.
- Ocena i analiza informacji.
- Ciekawość świata i wyobraźnia. (Wagner, 2014)

Każda z tych kompetencji kształtowana jest na przestrzeni lat na drodze systematycznego wdrażania do praktyki szkolnej innowacyjnych koncepcji nauczania, prowokujących u uczniów zaangażowanie, samodzielność i aktywną postawę wobec stawianych problemów. Z całą pewnością rozwój myślenia, właściwie zorganizowany na lekcjach matematyki, począwszy od edukacji przedszkolnej po akademicką, pozwoli na ukształtowanie wyżej wymienionych postaw i zachowań, pozwoli na ukształtowanie myślenia matematycznego.

John Mason w rekomendacji do swojej książki *Matematyczne myślenie* pisze, że jest to książka dla każdego:

- kto podejrzewa, że myślenie matematyczne polega na czymś więcej niż rachunki i chciałby się o tym przekonać,
- kogo zaintrygował kontakt z matematycznymi problemami i chciałby skuteczniej je rozwiązywać,
- kogo interesuje, co jest istotą matematycznych poszukiwań,
- kto jest odpowiedzialny za rozwijanie myślenia matematycznego u innych.

Myślenie matematyczne charakteryzuje cały zestaw aktywności umysłowych, których podejmuje się osoba rozwiązująca zadanie matematyczne. Przejawy myślenia matematycznego to m.in.:

- dostrzeganie i wykorzystywanie analogii,
- schematyzowanie i matematyzacja,
- definiowanie, interpretowanie danej definicji i racjonalne jej stosowanie,
- dedukcja i redukcja,
- kodowanie, konstruowanie i racjonalne stosowanie języka matematycznego,
- algorytmizowanie i racjonalne posługiwanie się algorytmami.

W Rozporządzeniu MEN z 23 grudnia 2008 roku w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół czytamy, że myślenie matematyczne to „Umiejętność wykorzystania narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym". A wcześniej już wspomniany Mason w swej książce pisze, że myślenie matematyczne to „Dynamiczny proces, który rozszerza nasze rozumienie, gdyż pozwala nam radzić sobie z coraz bardziej złożonymi ideami". Na skuteczność myślenia matematycznego duży wpływ mają następujące czynniki:

- Umiejętność wykorzystania procesów używanych w badaniach matematycznych.

- Panowanie nad stanami psychicznymi i emocjonalnymi oraz umiejętność ich wykorzystania.
- Rozumienie odpowiedniej dziedziny matematyki.
- Usprawnianie matematycznego myślenia. Można to osiągnąć poprzez konkretyzację, uogólnianie, wysuwanie hipotez, uzasadnianie.
- Prowokowanie matematycznego myślenia. Sprzyjają temu takie czynności, jak: stwarzanie luki-wyzwania, niespodzianka, sprzeczność, dostrzeżona luka.
- Wspieranie matematycznego myślenia. Tutaj efekt uzyskamy przez zadawanie pytań, stawianie i podejmowanie wyzwań, refleksję.
- Podtrzymywanie matematycznego myślenia. Rozumiemy je jako rozwój świadomości przebiegu procesów, własnego zaangażowania, stanów psychicznych.

Zaś Mogens Niss, formułując osiem fundamentów kompetencji matematycznych, na pierwszym miejscu stawia właśnie myślenie matematyczne, które utożsamia z umiejętnością stawiania pytań. Pozostałe fundamenty to:

- Formułowanie i rozwiązywanie problemów matematycznych.
- Modelowanie matematyczne, którego zakres obejmuje komunikowanie.
- Rozumowanie matematyczne.
- Reprezentowanie bytów matematycznych, czyli rozumienie, interpretowanie.
- Posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami.
- Matematyczne komunikowanie się, czyli rozumienie matematycznych komunikatów.
- Używanie pomocniczych narzędzi. (Niss, 2003)

Kształcenie wszystkich wyżej wspomnianych kompetencji i aktywności oraz innych przejawów matematycznego myślenia powinno być równolegle wspierane z przekazywaną wiedzą.

Matematyczne myślenie krytyczne

Przyglądając się wszystkim wyżej wymienionym cechom myślenia matematycznego, dostrzegamy szereg tych, które charakteryzują myślenie krytyczne, a zatem można by rzec, że kształcąc myślenie matematyczne, oczywiście w odpowiedni i efektywny sposób, wyrabiamy u ucznia-osoby rozwijającej się cechy myślenia krytycznego. Działania te są możliwe i pożądane na każdym etapie rozwoju intelektualnego, o których wspomina Jean Piget (Piaget, 1966, 1977). Na każdym z tych etapów konieczne jest jednak użycie innych metod i narzędzi, właściwych do możliwości percepcyjnych danego etapu rozwojowego.

Trudno o jasną definicję myślenia krytycznego. Jonathan Michael Spector (Spector, 2019) twierdzi, że krytyczne myślenie obejmuje szereg skumulowanych i powiązanych zdolności, dyspozycji i innych zmiennych, takich jak: motywacja, kryteria, kontekst i wiedza. Kształtowanie krytycznego myślenia opiera się na doświadczeniach, np. obserwowaniu czegoś niezwykłego lub nietypowego, a następnie na drodze różnych form dochodzeń, które zakładają obserwację, wnioskowanie, argumentację, dowodzenie, testowanie wniosków oraz refleksję, dochodzenie do sformułowania wniosków i odpowiedzi.

Rozwój myślenia krytycznego często zaczyna się od prostych doświadczeń, takich jak obserwowanie różnic, napotykanie zagadkowych pytań lub problemów, kwestionowanie czyichś wypowiedzi, co następnie prowadzi do bardziej złożonych doświadczeń wykorzystujących umiejętności myślenia matematycznego wyższego rzędu, tj. logiczne rozumowanie, kwestionowanie założeń, rozważanie i ocena alternatywnych wyjaśnień. Do uruchomienia i kształtowania tego typu myślenia konieczna jest wiedza oraz motywacja do rozwoju. Jeśli dana osoba nie jest zainteresowana tym, co należy zaobserwować lub zbadać, zwykle nie rozpoczyna się nawet próba rozwiązania problemu. A zatem rozumowanie twórcze i krytyczne myślenie wymagają motywacji oraz dociekliwego usposobienia. Za mało i to na każdym poziomie edukacji zadań otwartych, zadań typu problem, zadań z nadmiarem i niedomiarem danych, czyli takich, które prowokują obserwację, doświadczenie, argumentację i badanie, takich, które są nietypowe, często nowe i nie poddają się znanym już schematom.

Myślenie formalne

To, w jaki sposób kształtuje się myślenie człowieka na kolejnych etapach jego rozwoju, opisał w swoich pracach J. Piaget. Zdefiniował on **myślenie formalne**, którego początki możemy obserwować już u około dwunastoletnich osób. Myślenie formalne umożliwia rozwiązywanie wszystkich klas problemów, od tych bazujących na operacjach konkretnych po hipotetyczne i słowno-pojęciowe.

Na myślenie formalne składa się wiele sposobów rozumowania: naukowo-indukcyjne, kombinatoryczne, odzwierciedlająco-abstrakcyjne oraz umiejętność dedukcji i konkluzji. Zadaniami, które prowokują myślenie formalne, są zadania, które w klasyfikacji Krygowskiej określa się mianem **zadań-problemów**. Są to zadania, których nie da się rozwiązać, stosując znany schemat bądź algorytm postępowania. Wymagają one twórczej pracy ucznia ze względu na zawarte w treści trudności teoretyczne lub praktyczne. Zadania te prowokują do aktywnego poszukiwania, tworzenia przez ucznia nowych konstruktów, wiedzy, opracowania własnej metody itd., które mogą przyczynić się do rozwiązania zadania-problemu.

Jednym z częściej spotykanych w matematyce szkolnej zadań problemowych są **zadania na dowodzenie**. W matematyce szkolnej wyróżnia się cztery rodzaje dowodów: **nie wprost**, **dedukcyjny**, **redukcyjny** i **zasadę indukcji matematycznej**. Franciszek Urbańczyk w *Zasadach nauczania matematyki* opisuje je w następujący sposób. **Dowód nie wprost** polega na znalezieniu kontrprzykładu dla danego twierdzenia, przy jednoczesnym założeniu jego prawdziwości, co tym samym dowodzi jego niepoprawności i obala dane twierdzenie. Metoda ta nie służy do sprawdzenia prawdziwości twierdzenia przez rozważenie kilku przypadków, może jedynie służyć do obalenia twierdzenia.

Wśród metod bezpośredniego dowodzenia twierdzeń wyróżniamy **dowód dedukcyjny**, zwany inaczej dowodem **wprost** czy **klasycznym**. Sposób dowodzenia tą metodą polega na wnioskowaniu prawdziwości tezy poprzez dedukcję z aksjomatów, założeń i twierdzeń danej teorii.

Wnioskowanie **redukcyjne** jest rodzajem implikacyjnego wnioskowania zawodnego, w którym kierunek wnioskowania jest niezgodny z kierunkiem implikacji wynikania logicznego, a prawdziwość przesłanek nie gwarantuje prawdziwości wniosku. Rozumowanie to polega na wychodzeniu od tezy do założeń.

Kolejną metodą dowodzenia jest zasada **indukcji matematycznej**, zwana również indukcją zupełną. Znajduje swoje zastosowanie wyłącznie w procesie dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych. Zasadę tę można opisać w dwóch krokach. Niech T(n) oznacza formę zdaniową zmiennej n określoną w dziedzinie $\mathbb{N}$. Jeśli w miejsce n podstawimy dowolną liczbę naturalną, to T(**n**) stanie się zdaniem prawdziwym albo fałszywym, zależnie od wartości n. Jeżeli istnieje taka liczba naturalna n_0, że $\mathrm{T}(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym, dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$ prawdziwa jest implikacja: $T(n) \Longrightarrow T(n+1)$, to $T(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej $n \geq n_0$.

Ostatnią metodą sprawdzania prawdziwości twierdzeń wykorzystywaną w matematyce szkolnej jest metoda **rozważenia wszystkich przypadków**. Po wykazaniu, że dana teza jest prawdziwa dla każdego elementu spełniającego założenia tej tezy, udowodniona zostanie jej prawdziwość. Oczywiście metoda ta nie jest optymalna ze względu na przymus rozpatrzenia każdego z możliwych przypadków, jednak nadal jest ona wykorzystywana między innymi przy dowodzeniu tautologii KRZ metodą zero-jedynkową.

Badanie myślenia formalnego

Pomysł na badania – motywacja

Pomysł na przeprowadzenie badań na temat myślenia formalnego zrodził się w wyniku obserwacji i brania czynnego udziału w badaniach Edyty Juskowiak, w których okazało się, że badani nieczęsto rozwiązują zadania nietypowe przez wykorzystanie chociażby przejawów rozumowania formalnego (Juskowiak, 2019). W wyniku tego próbowano znaleźć odpowiedzi na pytania: Czy szkoła faktycznie kształtuje umiejętność myślenia formalnego wśród uczniów?, Czy osoby rozpoczynające studia potrafią myśleć formalnie? W ten sposób powstał pomysł na **cel badań**: *Jakie oznaki myślenia formalnego w procesie rozwiązywania zadań typu problem przejawiają studenci i maturzyści?*

Metodologia badań

Aby znaleźć odpowiedzi na cel badań, postawiono następujące pytania badawcze:

1. Czy badani potrafią przeprowadzić dowód?
2. Czy badani poprawnie uzasadnią poprawność przeprowadzonych dowodów?
3. Czy badani potrafią poprawnie operować nowo poznanymi, abstrakcyjnymi pojęciami (działanie ♦, zmienne i spójniki logiczne)?
4. Czy badani operują abstrakcyjnymi bytami w procesie rozwiązywania zadań?

Na badanych wybrano osoby, które odbyły całą edukację matematyczną według *Podstawy programowej*[1] zakładającej rozwijanie umiejętności korzystania z myślenia formalnego w procesie rozwiązywania zadań. W pierwotnym założeniu badani mieli być studentami pierwszego roku, więc osobami, które zdały egzamin maturalny z matematyki.

Charakterystyka grupy osób badanych

Aby osiągnąć wyżej opisany cel, na początku roku szkolnego 2020/2021 rozpoczęto poszukiwania chętnych. Niestety ze względu na sytuację zdalnego nauczania, kontakt ze studentami pierwszego roku był znacznie utrudniony, mimo usilnych prób. Z tego względu, aby zebrać odpowiednią grupę osób badanych, poszerzono ją o maturzystów. Biorąc pod uwagę to, że maturzyści już rozpoczęli wówczas przedmaturalne powtórki, można uznać, że zrealizowali oni już całą *Podstawę programową* na ten etap edukacji, a studenci nie posiedli jeszcze wiedzy i umiejętności z poziomu studiów wyższych. Dodatkowo, biorąc pod uwagę małe rozbieżności w wieku osób badanych, można ją uznać za homogenną. Łącznie w badaniach wzięło udział 34 uczniów poznańskiego liceum oraz 13 studentów Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Na rozwiązanie zadań badani mieli 60 minut, jednak większość z nich ukończyła pracę przed

[1] Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla czteroletniego liceum ogólnokształcącego i pięcioletniego technikum z 2018 roku.

upłynięciem wyznaczonego czasu. W czerwcu 2020 roku odbył się pilotaż przeprowadzony asynchronicznie na grupie 12 studentów oraz 11 maturzystów. Celem pilotażu było sprawdzenie, czy karta badań jest odpowiednio skonstruowana, aby móc przed badaniem wprowadzić do niej konieczne poprawki wynikające z uwag osób biorących udział w pilotażu.

Charakterystyka narzędzia

Do przeprowadzenia badań wykorzystano kartę [załącznik 1] złożoną z 4 zadań typu problem w klasyfikacji Krygowskiej. Trzy zadania dotyczyły algebry, jedno było z dziedziny logiki matematycznej. Uczniowie w każdym z zadań proszeni byli o sprawdzenie, czy pewna zależność zachodzi, a następnie o uzasadnienie poprawności przeprowadzonego rozumowania. Na karcie znajdowało się również miejsce na uwagi osób biorących udział w badaniu.

W zadaniu pierwszym i drugim badani proszeni byli o sprawdzenie, czy nierówność jest działaniem przechodnim.

Treść zadania 1: Sprawdź, czy z faktu: $x \neq y$ *i* $y \neq z$ i wynika, że $x \neq z$.
Uzasadnij swoją odpowiedź.

Treść zadania 2: Sprawdź, czy z faktu: $x \neq y$ *i* $y \neq z$ i wynika, że $x \neq z$, przy czym $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadania te różniły się od siebie umieszczeniem w treści zadania drugiego zbioru, do którego należą zmienne x, y oraz z. Miało to na celu sprawdzić, czy i jak będą różniły się rozwiązania badanych w zależności od umieszczenia w treści zadania zbioru oraz czy badani w jakikolwiek sposób oznaczą zbiór w zadaniu pierwszym. W trakcie pilotażu uczestnicy zwrócili uwagę na dobór oznaczenia zbioru liczb wymiernych. Z tego względu każda z osób biorąca udział w badaniu otrzymała kartę badań z oznaczeniami zgodnymi z realizowaną przez nią *Podstawą programową*.

Zadanie trzecie polegało na sprawdzeniu przez studentów łączności działania ♦.

Treść zadania 3: Dla dowolnych $a,b,c \in R$ działanie ♦ jest zdefiniowane następująco:

$$a \blacklozenge b = a + 2ab + b.$$

Sprawdź, czy:

$$a \blacklozenge (b \blacklozenge c) = (a \blacklozenge b) \blacklozenge c.$$

Uzasadnij swoją odpowiedź.

W tym zadaniu podana została dziedzina oraz zdefiniowano łączność, aby zminimalizować ryzyko niezrozumienia treści zadania.

Zadanie czwarte polegało na udowodnieniu prawa De Morgana:

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q).$$

Treść zadania 4: Wiedząc, że $p, q \in \{0, 1\}$ oraz poniższe zależności przyjmują następujące wartości:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

p	$\sim p$
0	1
1	0

Sprawdź, czy dla każdej wartości p, q poniższa zależność przyjmuje wartość 1. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$. Uzasadnij swoją odpowiedź.

W trakcie badania uczniowie i studenci otrzymywali kartę badań w trzech częściach: pierwsza zawierała metryczkę i zadanie 1, druga zadanie 2 i 3, a trzecia zadanie 4. Badani po rozwiązaniu danej części oddawali ją i wówczas otrzymywali kolejną do rozwiązania.

Przebieg badań

Badanie zostało zrealizowane w dwóch częściach. Pierwsza odbyła się stacjonarnie we wrześniu 2020 roku w jednym z poznańskich liceów, gdzie 34 maturzystów podjęło się rozwiązania karty badań. Druga natomiast odbyła się zdalnie na przełomie września i października, w której wzięło udział 13 studentów, w tym 6 zgodziło się połączyć przez MS Teams i synchronicznie rozwiązać kartę badań, a pozostali mieli za zadanie przesłać rozwiązania w wyznaczonym terminie.

W badaniu wzięło udział łącznie 47 chętnych. Osoby rozwiązujące zadania zdalnie w sposób synchroniczny oraz stacjonarnie rozwiązały kartę badań w średnio w czasie 45 minut. W przebiegu badań uczniowie oraz studenci pracowali samodzielnie.

Wyniki badań

Karta badań była sprawdzana według następujących kryteriów:

1. Poprawność rozwiązania zadania. Ze względu na przeanalizowane rozwiązania, wśród których można wyróżnić rozwiązania częściowo poprawne,

dodano je do kryteriów oceny. Dlatego również charakterystyka aspektu częściowej poprawności związana jest ściśle z przypadkami analizowanymi w badaniu.

2. Ocena rozumowania z podziałem na: empiryczne, intuicyjne oraz formalne. Największy nacisk w przebiegu badań był kładziony na zaobserwowanie zachowań badanych mogących świadczyć o rozumowaniu o charakterze formalnym. Wśród nich można wyróżnić:

- Stosowanie języka symbolicznego;
- Prawidłowe korzystanie z twierdzeń i definicji;
- Świadome stosowanie zasady dedukcji – wyprowadzanie twierdzeń jedynie na podstawie już dowiedzionych twierdzeń i definicji;
- Przeprowadzanie dowodów: wprost, nie wprost, redukcyjnych, dedukcyjnych oraz indukcyjnych. (Mleczak, 2021)

Analiza porównawcza rozwiązań poszczególnych zadań ze względu na ich poprawność

W wyniku analizy okazało się, że jedynie 28 z 47 osób biorących udział w badaniu pozostawiło rozwiązania i komentarze umożliwiające przeprowadzenie diagnozy trudności w procesie rozwiązywania poszczególnych zadań w ujęciu sposobu myślenia osoby rozwiązującej daną kartę badań. Poniżej opisane zostały zbiorcze wnioski wynikające z analizy poszczególnych zadań, uwzględniające poprawność rozwiązań.

Tabela 1. Analiza poprawności rozwiązań poszczególnych zadań w trakcie pilotażu

Pilotaż	zad.1.		zad.2.		zad.3.		zad.4.	
poprawność rozwiązania	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent
poprawne rozwiązanie	12	52,17%	12	52,17%	9	39,13%	3	13,04%
częściowo poprawne rozwiązanie	7	30,43%	7	30,43%	4	17,39%	1	4,35%
niepoprawne rozwiązanie	4	17,39%	4	17,39%	10	43,48%	17	73,91%
brak rozwiązania	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	2	8,70%

Tabela 2. Analiza poprawności rozwiązań poszczególnych zadań w trakcie badania

Badanie	zad.1.		zad.2.		zad.3.		zad.4.	
poprawność rozwiązania	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent
poprawne rozwiązanie	6	12,77%	6	12,77%	5	10,64%	8	17,02%
częściowo poprawne rozwiązanie	7	14,89%	7	14,89%	9	19,15%	2	4,26%
niepoprawne rozwiązanie	12	25,53%	13	27,66%	13	27,66%	18	38,30%
brak rozwiązania	22	46,81%	21	44,68%	20	42,55%	19	40,43%

W trakcie pilotażu aż 19 spośród 23 osób biorących w nim udział w zadaniu pierwszym przyjęło wybrany zbiór jako dziedzinę dla działania nierówność i pozostawiły komentarz świadczący o zauważeniu braku tejże dziedziny. Różni się to znacząco od wyników uzyskanych w trakcie badań, w których żadna osoba nie zwróciła uwagi na brak dziedziny. Zadanie to poprawnie rozwiązało 6 osób, natomiast częściowo poprawnie 7 osób. Częściowa poprawność polegała na rozważeniu dwóch przypadków: gdy opisana zależność nie zachodzi, tzn. $x = z$ lub zachodzi tzn. $x \neq z$, jednak bez zapisania wniosków płynących z tego rozumowania.

Wśród badanych najczęstszą metodą sprawdzenia poprawności twierdzenia z pierwszego i drugiego zadania było podstawianie liczb i wysnuwanie często błędnych wniosków dotyczących twierdzenia. Zapisanie dziedziny w treści zadania drugiego sprowokowało niektórych badanych do przeprowadzenia odmiennego rozumowania bazującego na różnicy zbiorów. W trakcie pilotażu nie pojawił się taki pomysł na rozwiązanie tego zadania.

Nie

Uzasadnienie:

Warunki $x \neq y$ oraz $y \neq z$ spełnia $x \in Q/\{y\}$ oraz $z \in Q/\{y\}$

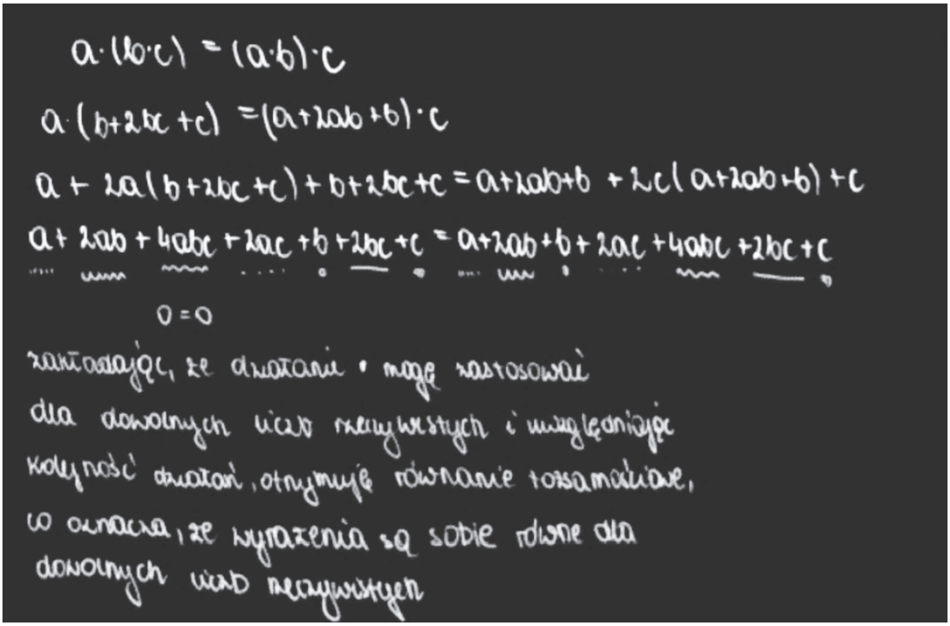
x należy do zbioru zawierającego z a z należy do zbioru zawierającego x

x może być równe z [2]

Rysunek 1. Poprawne rozwiązanie zadania 2 z wykorzystaniem różnicy zbiorów

[2] W trakcie przeprowadzania badania wśród studentów, osoby, które nie miały dostępu do drukarki i skanera, zapisywały swoje rozwiązania w programie Word.

Cztery osoby rozpoczęły rozwiązanie zadania trzeciego metodą przekształceń równoważnych, jednak zrezygnowały z dalszego rozwiązania zadania na tym samym etapie, kiedy należało zastosować definicję działania ♦ dla zmiennej i wyrażenia algebraicznego. Część osób w tym momencie zamieniała działanie ♦ na mnożenie i kontynuowała rozwiązanie zadania ze zmienioną definicją działania.



Rysunek 2. Poprawne rozwiązanie zadania 3 z komentarzem autora

Poprawne rozwiązanie zadania czwartego polegało na rozważeniu wszystkich par p i q i sprawdzeniu dla nich wartości wyrażenia $\sim(p \land q) \Leftrightarrow (\sim p \lor \sim q)$. Osoby, których rozwiązania zostały zakwalifikowane jako częściowo poprawne, opuściły w swoim rozumowaniu jedną z par, albo p = 0, q = 1, albo p = 1, q = 0, i nie uzasadniły takiego wyboru ani jego poprawności.

Analiza porównawcza rozwiązań poszczególnych zadań ze względu na zaobserwowany sposób rozumowania

Poniższe tabele zawierają informację na temat liczby osób, które w procesie rozwiązywania poszczególnych zadań wykorzystały dany sposób rozumowania.

Tabela 3. Analiza rodzaju rozumowania w poszczególnych zadań w trakcie pilotażu

Pilotaż	zad.1.		zad.2.		zad.3.		zad.4.	
zaobserwowany sposób rozumowania	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent
formalne	4	17,39%	4	17,39%	16	69,57%	3	13,04%
intuicyjne	0	0,00%	0	0,00%	1	4,35%	11	47,83%
empiryczne	11	47,83%	11	47,83%	6	26,09%	10	43,48%
splot rozumowań	8	34,78%	8	34,78%	4	17,39%	1	4,35%
brak rozwiązania	0	0,00%	0	0,00%	0	0,00%	2	8,70%

Tabela 4. Analiza rodzaju rozumowania w poszczególnych zadań w trakcie badań

Badanie	zad.1.		zad.2.		zad.3.		zad.4.	
zaobserwowany sposób rozumowania	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent	liczba osób	procent
formalne	3	6,38%	4	8,51%	7	14,89%	10	21,28%
intuicyjne	5	10,64%	5	10,64%	1	2,13%	4	8,51%
empiryczne	14	29,79%	15	31,91%	14	29,79%	11	23,40%
splot rozumowań	3	6,38%	2	4,26%	5	10,64%	3	6,38%
brak rozwiązania	22	46,81%	21	44,68%	20	42,55%	19	40,43%

Analiza rozwiązań wykorzystujących rozumowanie formalne

W procesie rozwiązywania zadania pierwszego jedynie wśród trójki badanych dało się zaobserwować formalny sposób rozumowania. Podobnie w przypadku zadania drugiego – tu rozumowanie formalne przedstawiły cztery osoby. Jednak w obu przypadkach część z przedstawionych rozumowań zawierała błędnie wykorzystany język symboliczny. Autor jednego z rozwiązań w poprawny sposób zastosował definicję nierówności oraz zapisał ją jako różnicę zbiorów. Osoba ta odróżnia założenie od tezy, rozumie relację między nimi, stosując dedukcję z założeń, dowodzi nieprawdziwości tezy, dzięki czemu przedstawione przez nią rozumowanie można uznać za formalne. Wśród badanych 7 osób zapisało rozwiązanie zadania 3 w sposób świadczący o próbie przeprowadzenia formalnego rozumowania. Jedno z rozwiązań prezentuje poprawne wykorzystanie definicji nowo poznanego działania ♦, rozumienie wykorzystywanego języka symbolicznego, w tym podstawialności wyrażeń algebraicznych za zmienne w definicji działania oraz rozumienie zasad dedukcji.

W procesie rozwiązywania zadania 4 aż 10 osób spośród badanych przedstawiła rozwiązanie mogące świadczyć o przeprowadzonym rozumowaniu formalnym. Łatwość wejścia na drogę rozumowania formalnego w tym zadaniu można upatrywać w konieczności rozważenia jedynie 4 par p i q spełniających założenia zadania.

Pojawiły się rozwiązania świadczące o poprawnym wykorzystaniu przez badanych tabeli wartości logicznych, zachowaniu przez nich również odpowiedniej kolejności narzuconej przez nawiasy zastosowane w zapisie prawa De Morgana.

Analiza rozwiązań wykorzystujących rozumowanie intuicyjne

Ten sposób rozumowania nie był zbyt często wykorzystywany przez badanych, jednak dało się go zaobserwować w pojedynczych przypadkach. W zadaniu pierwszym takie podejście dało się zaobserwować wśród pięciu osób. Badani na podstawie założeń z treści zadania wysnuwali naturalny dla nich wniosek, bez przeprowadzenia dowodu świadczącego o jego poprawności.

Wśród rozwiązań zadania czwartego zaobserwować można takie, w których badany nie sprawdził wartości wyrażenia z treści zadania dla jakiejkolwiek pary p i q jedynie na podstawie tego, że w tabeli prawdziwościowej wartości są różne: raz wynoszą 1, a raz 0, uznał, że jest to wystarczający powód, aby stwierdzić, że również wartości wyrażenia z treści zadania będą wynosiły raz 0 i raz 1 dla różnych par p i q, co można uznać za oznakę rozumowania intuicyjnego.

Analiza rozwiązań wykorzystujących rozumowanie empiryczne

Spoglądając na tabelę ze zbiorczą analizą prezentowanych przez uczestników badania sposobów rozumowania, można zauważyć, że najczęściej wybieranym sposobem rozumowania jest rozumowanie empiryczne. W zadaniu pierwszym aż 14 osób zaprezentowało taki sposób rozumowania.

Kilkoro badanych sprawdziło prawdziwość twierdzenia w zadaniu pierwszym na dwóch przypadkach: gdy twierdzenie zachodzi i nie zachodzi. Na podstawie zaprezentowanych przykładów w większości doszli do rozbieżnych wyników, jednak nie wysnuli na podstawie przykładów poprawnych wniosków. Większość z nich zauważyła, że istnieje możliwość, gdy to stwierdzenie nie jest prawdziwe, jednak nie zauważa, że to dowodzi bezpośrednio jego nieprawidłowości.

Analiza rozwiązań wykorzystujących splot rozumowań

W przebiegu analizy każdego z zadań dało się zauważyć rozwiązanie wpisujące się w więcej niż jeden sposób rozumowania. Takie rozumowania zostały zaklasyfikowane jako splot rozumowań. Najciekawszym przykładem splotu rozumowania jest jedno z rozwiązań zadania 3.

$$a \blacklozenge (b \blacklozenge c) = (a \blacklozenge b) \blacklozenge c$$

$$a \blacklozenge (b \blacklozenge c) = (a + 2ab + b) \blacklozenge c$$

$$L = a \blacklozenge (b + 2bc + c) \qquad P = (a + 2ab + b) \blacklozenge c$$

$$a=1, b=2, c=3$$

$$L = 1 \blacklozenge (2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3) = 1 \blacklozenge 17 = 1 + 2 \cdot 17 \cdot 1 + 17 = 1 + 34 + 17 = 52$$

$$P = (1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2) \blacklozenge 3 = 7 \blacklozenge 3 = 7 + 2 \cdot 3 \cdot 7 + 3 = 7 + 42 + 3 = 52$$

$$L=P$$

Uzasadnienie:

Po podstawieniu danych do $a \blacklozenge (b \blacklozenge c) = (a \blacklozenge b) \blacklozenge c$ wynika, że $a \blacklozenge (b \blacklozenge c) = (a \blacklozenge b) \blacklozenge c$

Rysunek 3. Rozwiązanie zadania 3 wykorzystujące splot rozumowań

Autor tego rozumowania najpierw poprawnie zastosował definicję działania ♦ dla dwóch zmiennych. Zanim przystąpił do zastosowania jej dla zmiennej i wyrażenia algebraicznego, wybrał konkretne a, b i c, dla których w dalszym ciągu przeprowadził rozumowanie. Następnie obliczył wartość wyrażeń w nawiasach i ponownie poprawnie zastosował definicję nowo poznanego działania, tym razem dla dwóch liczb. Na koniec, po wykazaniu równości lewej i prawej strony, zapiął wniosek dotyczący dowolnych a, b oraz c. Autor tego rozwiązania kilkakrotnie przechodził z rozumowania formalnego do empirycznego i odwrotnie, aby na końcu w formalny sposób zapisać wniosek z przeprowadzonego rozumowania.

PODSUMOWANIE ORAZ WNIOSKI Z BADAŃ

Podsumowując zebrane w ramach badań wyniki, można zauważyć, że jedynie 2 z 47 osób rozwiązały niniejszą kartę bez jakichkolwiek błędów, zachowując pełny formalizm swoich rozwiązań. Pozostałe 6 osób rozwiązało dwa lub trzy zadania poprawnie. W przebiegu badania można było zauważyć przejawy rozumowania formalnego łącznie u 13 osób, pozostałe wybrały inną drogę rozumowania. Jak więc brzmią odpowiedzi na postawione pytania badawcze?

1. Czy badani potrafią przeprowadzić dowód? Wyniki badań nie dają jednoznacznej odpowiedzi. Gdy należy rozważyć wszystkie możliwości, nieco ponad 21% badanych podołało tego typu zadaniu. W trakcie przeprowadzania dowodu nie wprost największą trudność sprawia znalezienie kontrprzykładu. Wówczas większość badanych wyciągało poprawne wnioski. Postawienie przed badanymi zadania polegającego na przeprowadzeniu formalnego dowodu redukcyjnego czy dedukcyjnego stanowiło dla nich ogromny problem. Niespełna 15% z nich podejmuje wówczas próbę formalnego rozwiązania zadania, jednak mało kto radzi sobie z nim w całości.
2. Czy badani poprawnie uzasadnią poprawność przeprowadzonych dowodów? Często uznawali sam dowód za poprawny i nie uzasadniają go. Może to świadczyć o nierozumieniu przeprowadzonego przez siebie rozumowania lub nierozumieniu, na czym polega uzasadnienie.
3. Czy badani potrafią poprawnie operować nowo poznanymi, abstrakcyjnymi pojęciami (działanie ♦, zmienne i spójniki logiczne)? W zadaniu trzecim większość uczestników badania napotkała problem, gdy należało wykorzystać definicję nowo poznanego działania, gdy zamiast dwóch zmiennych, jedną z nich zastępowało wyrażenie algebraiczne. Wówczas ponad 10% spośród badanych zrezygnowało z dalszego rozwiązania zadania w formalny sposób. Takie zachowanie może świadczyć o nierozumieniu definicji samego działania. Badany potrafi definicję przepisać, ale nie potrafi jej zastosować. W trakcie rozwiązywania zadania czwartego badani musieli operować na czterech nowo poznanych abstrakcyjnych bytach – spójnikach logicznych, wówczas możliwość rozważenia czterech przypadków mogła umożliwić im udowodnienie poprawności formuły z zadania.
4. Czy badani operują abstrakcyjnymi bytami w procesie rozwiązywania zadań? Tylko 2 osoby, stanowiące nieco ponad 4% badanych, poprawnie rozwiązały całą kartę badań, wykazując przejawy rozumowania formalnego. Wśród pozostałych osób przejawy tego sposobu rozumowania można było obserwować w niektórych zadaniach albo w ogóle, tu mowa o aż 39 osobach, więc niemal 83% badanych. Zdecydowana większość badanych nie posługiwała się pojęciami abstrakcyjnymi i nie przejawiała symptomów przeprowadzania formalnego rozumowania.

Jakie oznaki myślenia formalnego przejawiają studenci i maturzyści w procesie rozwiązywania zadań typu problem?

Na podstawie tak nielicznej próbki nie można jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie. Można zwrócić uwagę na pewne prawidłowości przebadanej grupy. Pierwszym z aspektów, który można zaobserwować, jest duża dysproporcja między wynikami otrzymanymi przez uczestników pilotażu, a wynikami osób biorących udział w badaniu. Wśród osób biorących udział w badaniu przejawy formalnego sposobu rozumowania dało się zaobserwować w kolejnych zadaniach u 6,38%; 8,51%; 14,89% i 21,28% osób, natomiast wśród osób biorących udział w pilotażu było to odpowiednio: 17,39%; 17,39%; 69,57% i 13,04%.

Można również zauważyć tendencję wśród badanych do niepodejmowania próby rozpoczęcia rozumowania formalnego. Każde z zadań zostało niepoprawnie rozwiązane przez ponad 25% osób oraz ponad 40% osób zostawiło je bez rozwiązania. Co istotniejsze, większość, bo ponad 70% badanych, którzy podejmowali próby rozwiązania któregokolwiek z zadań, wykorzystywali w tym celu podejście empiryczne lub, rzadziej, intuicyjne. Osoby te stosowały m.in. rozważenie przykładów nie w celu poszukiwania pomysłu, lecz traktując je jako rozwiązanie. W zadaniu trzecim niektóre osoby, które zdawały się nie rozumieć definicji nowego działania, zamieniały je na inne, dobrze im znane, np.: kwadrat sumy czy zwykłe mnożenie. Co interesujące, żadna z tych osób nie przeprowadziła do końca rozumowania mającego sprawdzić, czy wybrane przez nich działanie jest łączne.

Niespełna 30% badanych wykazało się przejawami rozumowania formalnego w procesie rozwiązywania choćby jednego z zadań. Rozwiązania tych osób charakteryzowały się następującymi przejawami rozumowania formalnego:

- Poprawne stosowanie języka symbolicznego – 13 osób;
- Poprawne przeprowadzanie rozumowań dedukcyjnych, rozumienie wywiedlności twierdzeń – 5 osób;
- Poprawne rozumienie i stosowanie definicji działania ♦ – 6 osób;
- Poprawne rozumienie i stosowanie zmiennych logicznych oraz tabeli prawdziwościowej – 8 osób;
- Poprawne przeprowadzanie dowodów – 8 osób.

Na podstawie przeprowadzonego badania można wysnuć alarmujący wniosek na temat przebadanej grupy. Rzadziej niż co trzeci badany zaprezentował w rozwiązaniu przynajmniej jednego z zadań oznaki myślenia formalnego. Dodatkowo wśród osób, które podejmowały próbę przeprowadzenia rozumowania formalnego, pojawiały się błędy świadczące o: nierozumieniu różnicy między założeniem a tezą w twierdzeniu, brakiem umiejętności korzystania z definicji nowego działania, braku rozumienia różnicy między sprawdzeniem twierdzenia na przykładzie a dowodem lub brakiem umiejętności skonstruowania poprawnych wniosków na podstawie zaprezentowanego rozumowania. Według *Podstawy programowej* kształcenia ogólnego dla szkół ponadpodstawowych przedstawione wyżej umiejętności są tymi, które powinna kształtować cała edukacja matematyczna.

BIBLIOGRAFIA

Juskowiak, E. (2019). „Using geometry, justify […]". Readiness of 14-year-old students to show formal operational thinking. W: U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis (red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 217–224). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Krygowska, Z. (1986). Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich [Elements of mathematical activity that should play a significant role in mathematics for all]. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego*, seria 5: *Dydaktyka Matematyki*, *6*, 25–41.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2005). *Matematyczne myślenie* [*Thinking Mathematically*]. Warszawa: Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

Ma, S., Spector, J. M. (2019). Inquiry and critical thinking skills for the next generation: from artificial intelligence back to human intelligence. *Smart Learning Environments*, *6*.

Mleczak, J. (2021). *Przejawy myślenia formalnego wśród studentów pierwszego roku* [*Formal Thinking in First- Year University Students*]. Poznań.

Niss, M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematical Competencies. W: B. L. Madison, L. A. Steen (red.), *Quantitative Literacy. Why Numeracy Matters for Schools and Colleges.* Proceedings *of the National Forum on Quantitative Literacy held at the National Academy of Sciences in Washington* (s. 215–220). National Council on Education and the Disciplines.

Piaget, J. (1966). *Origins of Intelligence in Children*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Piaget, J. (1977). *Where Education is Going*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Polya, G. (2009). *How to solve it?* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Siwek, H. (2005). *Dydaktyka matematyki* [*Didactics of Mathematics*]. Warszawa: Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne.

Spector, J. M. (2019). Complexity, Inquiry Critical Thinking, and Technology: A Holistic and Developmental Approach. W: T. Parsons, L. Lin, D. Cockerham (red.), *Mind, Brain and Technology. Educational Communications and Technology: Issues and Innovations* (s. 17–25). Cham: Springer.

Trempała, J. (2011). *Psychologia rozwoju człowieka* [*Psychology of human development*]. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Urbańczyk, F. (1960). *Zasady nauczania matematyki* [*Principles of teaching mathematics*]. Warszawa: Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych.

Wagner, T. (2014). *Learning By Heart An Unconventional Education.* Londyn: Penguin Books.

Prace monograficzne z dydaktyki matematyki

WSPÓŁCZESNE PROBLEMY NAUCZANIA MATEMATYKI

Analiza porównawcza typów zadań maturalnych z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym w latach 2005–2023

Tomasz Szwed

Akademia Nauk Stosowanych w Raciborzu
tomasz.szwed@akademiarac.edu.pl
ORCID: 0009-0007-1235-2010

Streszczenie

Egzamin maturalny z matematyki może być postrzegany jako zwieńczenie procesu kształcenia matematycznego w szkole. Zwykle przez dwanaście lat, począwszy od klas edukacji wczesnoszkolnej, a skończywszy na ostatniej klasie liceum lub technikum, polskie dzieci i młodzież nabywają kompetencje matematyczne. Ostatnim elementem tego procesu jest matura z matematyki, od 2010 roku egzamin obowiązkowy dla wszystkich zdających. Zaletą tego egzaminu jest jego zewnętrzny charakter, co oznacza, że wszyscy zdający w Polsce, w danej sesji egzaminacyjnej, rozwiązują te same zestawy zadań. Rozwiązania zadań są następnie sprawdzane i oceniane według jednakowych kryteriów przez specjalnie przeszkolonych egzaminatorów. Taki proces maturalny jest realizowany w Polsce od 2005 roku. W artykule autor opisuje chronologicznie ewolucje rozwoju arkuszy maturalnych, podkreślając przede wszystkim jakość i typy zadań maturalnych. Jest to narracja naocznego świadka wydarzeń opisywana z perspektywy nauczyciela matematyki, egzaminatora maturalnego oraz osoby zaangażowanej w kształcenie i dokształcanie nauczycieli. Autor prezentuje analizę porównawczą zestawów zadań użytych w ramach egzaminu maturalnego z matematyki.

Summary

The matura exam in maths can be perceived as the culmination of the mathematical education process at school. The usual course for Polish children and teenagers is that they acquire mathematical competence for 12 years starting from early school educational classes and finishing with the last high school or technical school class. The final element of this process is the matura exam in maths that has been obligatory for all examinees since 2010.

The asset of this exam is its external character, which means that all examinees in Poland in the given examination session solve the same sets of tasks. The solutions of these tasks are then checked and assessed according to the same criteria by the examiners that had been duly trained for this purpose. Such matura exam process has been performed in Poland since 2005. In the article the author describes chronological evolutions of the development of matura exam tasks highlighting first of all the quality and the types of matura exam tasks. It is the eyewitness's narrative described from the perspective of the maths teacher, the matura examiner and the person engaged in the teachers' education and training. The author presents the comparative analysis of the sets of tasks used within the framework of the matura exam in maths.

Jakość i typ zadań egzaminacyjnych determinuje sposób i poziom nauczania matematyki w szkołach. To zadanie przypisuje się prof. Jerzemu Słupeckiemu, logikowi, reprezentantowi szkoły lwowsko-warszawskiej, który swoje zawodowe losy związał z Wrocławiem i Opolem.

Artykuł jest poświęcony jakości zadań maturalnych z matematyki oraz ich typom. Od 2005 roku, czyli od czasu, kiedy matura jednakowa dla wszystkich pojawiła się w systemie egzaminacyjnym, bardzo się zmieniło. Mieliśmy do czynienia przynajmniej z trzema punktami zwrotnymi. W 2010 roku matura z matematyki stała się obowiązkowa dla wszystkich zdających. W 2015 roku pojawiła się nowa forma arkusza, ponieważ nastąpiła zmiana podstawy programowej. W 2023 roku nastąpi coś bardzo radykalnego. W arkuszu egzaminacyjnym na poziomie podstawowym pojawi się co najmniej 13 typów zadań. Takiej sytuacji nie było jeszcze nigdy.

W artykule będącym swego rodzaju zapisem historycznym, opartym na doświadczeniu nauczyciela matematyki w liceum i egzaminatora maturalnego, zostanie przedstawiona analiza porównawcza różnych typów zadań, zarówno w arkuszach na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym. Egzamin maturalny z matematyki, powszechny i obowiązkowy dla wszystkich, mocno osadził się w polskiej rzeczywistości edukacyjnej. I niewątpliwie ma, i będzie miał istotny wpływ na sposób i poziom nauczania matematyki w szkołach.

Rozwój matury z matematyki można podzielić na cztery główne okresy.

I. Lata 2005–2009,

II. Lata 2010–2014,

III. Lata 2015–2022,

IV. Lata od 2023.

Podział taki został dokonany na podstawie istotnych różnic w podstawie prawnej przeprowadzanego egzaminu oraz typów zadań, za pomocą których Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE) zdecydowała się sprawdzać wiedzę i umiejętności zdających.

OKRES PIERWSZY, CZYLI 2005–2009

Egzamin maturalny z matematyki jako element egzaminu zewnętrznego po raz pierwszy pojawił się w 2005 roku. Został przeprowadzony na podstawie *Standardów wymagań egzaminacyjnych* opublikowanych przez Ministra Edukacji Narodowej. Za przygotowanie narzędzi pomiaru, arkuszy maturalnych, była odpowiedzialna Centralna Komisja Egzaminacyjna, podlegająca Ministrowi Edukacji. Zasady organizacji egzaminu maturalnego zostały opisane w Rozporządzeniu o ocenianiu (MEN, 2001).

W tym miejscu warto wyjaśnić kwestię nazewnictwa poziomu egzaminu maturalnego z matematyki. Uczniowie szkół kończących się maturą mogą uczyć się matematyki w **zakresie** podstawowym lub rozszerzonym. Po ukończeniu szkoły podchodzą do egzaminu maturalnego z matematyki **na poziomie** podstawowym lub rozszerzonym. Te dwa pojęcia (zakres i poziom) są bardzo często mylone.

W omawianym okresie, podobnie jak w pozostałych, zdający mogli wybierać matematyką zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym, z tym że jeśli ktoś wybrał poziom rozszerzony, to musiał również zdawać poziom podstawowy. Wyjątek stanowiła sesja w roku 2007, kiedy uczniowie, wybierając poziom rozszerzony, nie musieli zdawać poziomu podstawowego. W związku z tym arkusz na poziomie rozszerzonym zawierał kilka zagadnień z niższego poziomu. Sesja 2017 zostanie zapamiętana również jako sesja „amnestyjna". Prawie 50 000 zdających otrzymało świadectwo maturalne, mając niezdany jeden egzamin. Taka sytuacja nie powtórzyła się w żadnej sesji.

Przykłady zadań egzaminacyjnych z pierwszego okresu[1]

Arkusz na poziomie podstawowym był zdominowany przez zadania otwarte, wymagające dobrego zrozumienia treści, zaplanowania strategii rozwiązania, przeprowadzenia obliczeń oraz zredagowania odpowiedzi końcowej. Przykładem jest poniższe zadanie z rachunku prawdopodobieństwa.

P 2005 Zadanie 1 (3 pkt.)

W pudełku są trzy kule białe i pięć kul czarnych. Do pudełka można albo dołożyć jedną kulę białą, albo usunąć z niego jedną kulę czarną, a następnie wylosować z tego pudełka jedną kulę. W którym z tych przypadków wylosowanie kuli białej jest bardziej prawdopodobne? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

---

[1] Oznaczenie zadania zawiera informacje o poziomie, roku egzaminu, numerze zadania w arkuszu maturalnym oraz liczbie możliwych do uzyskania punktów.

W arkuszach co jakiś czas pojawiały się zadania typu *rozwiąż przez analogię*. Zdający na podstawie analizy rozumowania dość rozbudowanego rozwiązania postawiony był przed samodzielnym rozwiązaniem zadania analogicznego (przykład poniżej).

P 2005 Zadanie 11 (3 pkt.)

Sumę $S = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{3}{301\cdot 304} + \frac{3}{304\cdot 307}$ można obliczyć w następujący sposób:

a) sumę S zapisujemy w postaci

$$S = \frac{4-1}{1\cdot 4} + \frac{7-4}{4\cdot 7} + \frac{10-7}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{304-301}{301\cdot 304} + \frac{307-304}{304\cdot 307}$$

b) każdy składnik tej sumy przedstawiamy jako różnicę ułamków

$$S = \left(\frac{4}{4\cdot 1} - \frac{1}{4\cdot 1}\right) + \left(\frac{7}{7\cdot 4} - \frac{4}{7\cdot 4}\right) + \left(\frac{10}{10\cdot 7} - \frac{7}{10\cdot 7}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\frac{304}{304\cdot 301} - \frac{301}{304\cdot 301}\right) + \left(\frac{307}{307\cdot 304} - \frac{304}{307\cdot 304}\right)$$

stąd

$$S = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{301} - \frac{1}{304}\right) + \left(\frac{1}{304} - \frac{1}{307}\right)$$

więc

$$S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{301} - \frac{1}{304} + \frac{1}{304} - \frac{1}{307}$$

c) obliczamy sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim

$$S = 1 - \frac{1}{307} = \frac{306}{307}.$$

Postępując w analogiczny sposób, oblicz sumę $S = \frac{4}{1\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{4}{281\cdot 285}$.

Zadania na poziomie rozszerzonym okazały się zadaniami nietypowymi, dość trudnymi. Ta trudność wynikała z nieprzewidywalności. W zestawie pojawiały się również zadania typowe, np. dotyczące problemu rozwiązania równania kwadratowego z parametrem. W poniższym zestawie przykładowych zadań z poziomu rozszerzonego znajduje się zadanie z indukcji matematycznej. Był to jedyny przypadek takiego zadania w całej historii matury zewnętrznej.

R 2005 Zadanie 11 (3 pkt.)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

R 2005 Zadanie 14 (5 pkt.)

Oblicz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)}{5 + 7 + 9 + \cdots + (2n+3)}.$$

R 2005 Zadanie 17 (7 pkt.)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

R 2005 Zadanie 12 (5 pkt.)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwy jest wzór:

$$1 \cdot 3 \cdot (1!)^2 + 2 \cdot 4 \cdot (2!)^2 + \cdots + n \cdot (n+2) \cdot (n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1.$$

R 2005 Zadanie 19 (10 pkt.)

Dane jest równanie:

$$x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$$

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

Autorzy powyższego zadania zdecydowali, że będzie ono punktowane na maksymalnie 10 punktów. To zadanie jest najbardziej punktowanym zadaniem na obu poziomach w historii matur od 2005 roku.

W omawianych okresie zdający zdawali oba poziomy w jednym dniu, od 9.00 i od 14.00. Z perspektywy zdającego było to wyzwanie wymagające bardzo dużego wysiłku intelektualnego oraz kondycji fizycznej. Taka sytuacja utrzymała się aż do roku 2012. Od 2013 roku egzaminy były oddzielone kilkudniową przerwą.

W okresie 2005–2009 egzamin maturalny z matematyki nie był egzaminem obowiązkowym dla wszystkich zdających. Zdawali go tylko chętni abiturienci szkół średnich. W 2005 roku matematyka była najchętniej wybieranym przedmiotem z puli nieobowiązkowych. Od 2006 roku takim przedmiotem stała się geografia[2].

Na rozwiązania arkusza podstawowego zdający mieli 120 minut. W tym czasie musieli rozwiązać 10 zadań otwartych, punktowanych od 3 do 7 punktów. Na poziomie rozszerzonym czasu na rozwiązanie zwykle dziewięciu zadań było

[2] Powodem tego była najprawdopodobniej niska zdawalność.

więcej, czyli na początku 150 minut, później – 180 minut. Zdający, którym nie udało się uzyskać przynajmniej 30% możliwych do zdobycia punktów[3], mieli zdawać egzamin poprawkowy w styczniu następnego roku lub podczas kolejnej majowej sesji maturalnej.

OKRES DRUGI, CZYLI 2010–2014

W tym okresie, po dwudziestu pięciu latach przerwy, matura z matematyki na poziomie podstawowym stała się egzaminem obowiązkowym dla wszystkich zdających. Podstawą przeprowadzenia egzaminu maturalnego z matematyki nadal były *Standardy wymagań egzaminacyjnych*. Na dwa lata przed egzaminem został udostępniony *Informator maturalny z matematyki*, określający oczekiwaną strukturę oraz budowę arkusza maturalnego. Zdający mogli też zapoznać się z **kartą wzorów**, z której mieli prawo korzystać z trakcie egzaminu. Takie materiały pomocnicze, w kontekście obowiązkowości matematyki, nabrały szczególnie istotnego znaczenia. Na uwagę zasługuje fakt bardzo istotnej zmiany w arkuszu na poziomie podstawowym. Typowy arkusz z tego okresu zawierał 25 zadań zamkniętych wielokrotnego wyboru, z jedną prawidłową odpowiedzią[4], 6 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi punktowanych na maksymalnie 2 punkty oraz 3 zadań otwartych rozszerzonej odpowiedzi.

Przykłady zadań egzaminacyjnych z drugiego okresu

P 2010 Zadanie 2 (1 pkt)

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

A. 163,80 zł B. 180 zł C. 294 zł D. 420 zł

P 2010 Zadanie 3 (1 pkt)

Liczba $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa

A. 1 B. 4 C. 9 D. 36

P 2010 Zadanie 4 (1 pkt)

Liczba $\log_4 8 + \log_4 2$ jest równa

A. 1 B. 2 C. $\log_4 6$ D. $\log_4 10$

[3] Zwykle było to 15 punktów na 50 możliwych.

[4] Odpowiedź prawdziwa, czyli *werstraktor*, znajdowała swoje miejsce na tle trzech odpowiedzi nieprawdziwych – *dystraktorów*.

P 2010 Zadanie 26 (2 pkt.)

Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \leq 0$

To ostatnie zadanie, dotyczące problemu rozwiązania nierówności kwadratowej, stało się przykładem najbardziej przewidywalnego zadania maturalnego aż do 2022 roku. Warto również dodać, że zwykle co trzeci zdający nie rozwiązuje takiego zadania poprawnie.

P 2011 Zadanie 32 (5 pkt.)

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Cytowane zadanie to przykład bardzo popularnego zadania z drugiego okresu, czyli zadania tekstowego sprowadzającego się do dość rozbudowanego układu równań. Przewidywalność takiego rodzaju zadań oraz ich łatwa adaptacja na zadania o różnej treści sprawiły, że zdający rozwiązywali je na dość wysokim poziomie.

P 2010 Zadanie 30 (2 pkt.)

Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

W drugim okresie maturalnym znaczenia nabrały zadania wymagające dowodzenia. Były to zadania typu: wykaż, udowodnij, uzasadnij. Poziom ich rozwiązania zwykle oscylował na poziomie kilku procent, czyli z ich poprawnym rozwiązaniem radziło sobie nie więcej niż 10% wszystkich zdających. Wskaźniki te jednak stopniowo się podnosiły, aby ostatecznie osiągnąć poziom 23% w roku 2022.

R 2010 Zadanie 1 (4 pkt.)

Rozwiąż nierówność $|2x + 4| + |x - 1| \leq 6$.

R 2010 Zadanie 2 (4 pkt.)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

R 2010 Zadanie 5 (5 pkt.)

O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a + c = 10$, zaś ciąg $(a + 1, b + 4, c + 19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

Ostanie trzy zadania to przykłady zadań z poziomu rozszerzonego. Z perspektywy lat należy przyznać, że arkusze na tym poziomie stały się dość przewidywalne. Nierówności z dwiema wartościami bezwzględnymi, równanie trygonometryczne sprowadzające się do równania kwadratowego oraz zadanie z ciągu arytmetycznego przechodzącego w ciąg geometryczny (lub odwrotnie) to lista „pewniaków" maturalnych. Świadomi i dobrze kierowani przez nauczycieli zdający na pewno na tym korzystali. Musieli jednak włożyć w przygotowanie się do egzaminu dużo pracy, co niewątpliwie było bardzo pozytywnym zjawiskiem.

Na rozwiązanie arkusza podstawowego zdający mieli 170 minut. W tym czasie musieli rozwiązać 25 zadań zamkniętych oraz 9 zadań otwartych punktowanych za 2, 4, 5 lub 6 punktów. Na poziomie rozszerzonym na rozwiązanie zwykle od 11 do 12 zadań było 180 minut.

W drugim okresie maturalnym została ustabilizowana pewna triada związana z terminami. Egzamin maturalny w terminie głównym odbywał się na początku maja. Egzamin maturalny w terminie dodatkowym na początku czerwca, a egzamin poprawkowy w trzeciej dekadzie sierpnia. Taki porządek stał się już pewną tradycją porządkującą rok szkolny, ale również i rekrutację do szkół wyższych.

OKRES TRZECI, CZYLI 2015–2022

W tym okresie podstawą przeprowadzenia egzaminu stała się podstawa programowa, solidnie przygotowywana od kilku lat (MEN, 2008). Standardy wymagań egzaminacyjnych straciły rację bytu. Matura podstawowa na poziomie podstawowym nadal była (i nadal jest) egzaminem obowiązkowym dla wszystkich zdających. Arkusze **maturalne** z tego okresu niewiele różniły się od okresu drugiego, przynajmniej na poziomie podstawowym. Istotnie zmieniła się struktura arkusza na poziomie rozszerzonym. Pojawiły się w nim 4 zadania testowe wielokrotnego wyboru z jedną odpowiedzią prawdziwą oraz jedno zadanie z tzw. kodowaną odpowiedzią. Pozostałe zadania to zadania otwarte, punktowane od 3 do 7 punktów.

Przykłady zadań egzaminacyjnych z trzeciego okresu

P 2015 Zadanie 6 (0–1 pkt)

Suma wszystkich pierwiastków równania $(x+3)(x+7)(x-11)=0$ jest równa

A. –1 B. 21 C. 1 D. –21

P 2015 Zadanie 7 (0–1 pkt)

Równanie $\frac{x-1}{x+1}=x-1$

A. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 1$.

B. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = 0$.

C. ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = -1$.

D. ma dokładnie dwa rozwiązania: $x = 0$, $x = 1$.

P 2015 Zadanie 26 (0–2 pkt.)

Rozwiąż nierówność $2x^2-4x>(x+3)(x-2)$.

P 2015 Zadanie 27 (0–2 pkt.)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

R 2015. Zadanie 2 (0–1 pkt)

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ \big||x+3| - 4\big| & \text{dla } x > 0 \end{cases}$.

Równanie $f(x) = 1$ ma dokładnie

A. jedno rozwiązanie.

B. dwa rozwiązania.

C. cztery rozwiązania.

D. pięć rozwiązań.

R 2015. Zadanie 6 (0–2 pkt.)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{11n^3 + 6n + 5}{6n^3 + 1} - \dfrac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 4}\right)$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

R 2015. Zadanie 7 (0–2 pkt.)

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej *f*. Oblicz $\dfrac{f(6)}{f(12)}$.

R 2015. Zadanie 8 (0–3 pkt.)

Udowodnij, że dla każej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^4 - x^2 - 2x + 3 > 0$.

R 2015. Zadanie 12 (0–4 pkt.)

Funkcja *f* określona jest wzorem $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji *f*, które są równoległe do prostej o równaniu $y = 4x$.

R 2015. Zadanie 16 (0–7 pkt.)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

Na szczególną uwagę zasługuje ostatnie z listy przytoczonych zadań. Jest to przykład zadania otwartego związanego z optymalizacją, z wykorzystaniem rachunku pochodnych, za 7 punktów. I to była ważna nowość, obecna w arkuszach maturalnych również i obecnie.

Struktura arkusza maturalnego na poziomie podstawowym nie zmieniła się w stosunku do drugiego okresu maturalnego. Nadal na rozwiązania zadań zdający mieli 170 minut, 25 zadań testowych oraz 9 otwartych za 2, 4, 5, 6 pkt.

Na poziome rozszerzonym dla porównania: 180 minut, 4 zadania testowe, 1 z kodowaną odpowiedzią, 10 zadań otwartych od 3 do 7 pkt., w tym zadania na optymalizację z wykorzystaniem rachunku pochodnych.

W tym momencie warto wspomnieć o pewnym zawirowaniu wynikającym z czasu pandemii. W 2020 roku z powodu Covid-19 główna sesja maturalna została przesunięta na czerwiec, matura dodatkowa na lipiec, a poprawkowa na początek września. Taka zmiana terminów nie zachwiała znacząco procesu rekrutacji do szkół wyższych.

W latach 2021–2022 zostały również wprowadzone pewne zmiany w arkuszach egzaminacyjnych. Ministerstwo Edukacji Narodowej uzasadniło je trudnościami w przygotowaniach zdających wynikających z długotrwałej edukacji zdalnej oraz strajkami nauczycieli z pierwszej połowy 2019 roku. Zdający mieli do rozwiązania 28 zadań zamkniętych, 6 zadań otwartych krótkiej odpowiedzi i 1 zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi. Niektóre treści egzaminacyjne zostały usunięte z wymagań egzaminacyjnych. Modyfikacja wymagań i arkuszy dotyczyła również egzaminu na poziomie rozszerzonym, były to jednak zmiana minimalne.

OKRES CZWARTY, CZYLI OD 2023

W tym okresie matura z matematyki na poziomie podstawowym będzie nadal obowiązkowa dla wszystkich zdających. Podstawą jej przeprowadzenia stanie się podstawa programowa z 2019 roku (MEN, 2018), zmodyfikowana na okres 2023–2024 do wykazu wymagań egzaminacyjnych. W arkuszu egzaminacyjnym będzie od 29 do 40 zadań, znajdą się w nim zarówno zadania zamknięte, jak i otwarte. Arkusz egzaminacyjny **nie będzie podzielony** – tak jak arkusz w formule 2015 – na dwie części: z zadaniami zamkniętymi i otwartymi. W arkuszu egzaminacyjnym będą występowały wiązki zadań lub pojedyncze zadania.

Będzie **co najmniej** 13 typów zadań (CKE, 2022)[5].

Oto wykaz typów zadań maturalnych na poziomie podstawowym.

1. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–D.
2. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–C oraz wybiera jedno uzasadnienie tej odpowiedzi spośród 1–3 (ale tabelka może mieć różne rozmiary, np. 2 × 2, 2 × 3).
3. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A–F.

---

[5] Skąd zatem wzięło się słowo **co najmniej**? „Zaprezentowane w *Informatorze* zadania **nie wyczerpują wszystkich typów zadań**, które mogą wystąpić w arkuszu egzaminacyjnym”.

4. Zdający wybiera dwie odpowiedzi spośród A–G.
5. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–C oraz wybiera jedną odpowiedź spośród D–F.
6. Zdający wybiera jedną odpowiedź spośród A–D oraz wybiera jedną odpowiedź spośród E–H.
7. Zdający ocenia prawdziwość zdań (lub dokończeń zdań).
8. Zdający dobiera/przyporządkowuje/zestawia odpowiedź (spośród podanych) do określonych sytuacji/obiektów/elementów.
9. Zadanie otwarte za 1 punkt … wykropkowane z miejscem do uzupełnienia lub krótkie zadanie.
10. Zadanie otwarte za 2 punkty.
11. Zadanie otwarte za 3 punkty.
12. Zadanie otwarte za 4 punkty.
13. WIĄZKA. Wiązka zadań to **zestaw od dwóch do czterech zadań** występujących we wspólnym kontekście tematycznym, przy czym każde z zadań wiązki można rozwiązać **niezależnie** od rozwiązania innych zadań w danej wiązce. Wiązka zadań **może** się składać zarówno z zadań zamkniętych, jak i z zadań otwartych.

Trudno przewidzieć, jak rzeczywiście będzie wyglądał arkusz maturalny z matematyki na poziomie podstawowym. Wiadomo natomiast, jak wyglądał arkusz z matematyki w czerwcu 2022 roku. Arkusz na poziomie podstawowym składał się z 35 zadań. Zadania 1–28 były zadaniami zamkniętymi, zadania 29–34 otwartymi krótkiej odpowiedzi, zadanie 35 było zadaniem otwartym rozszerzonej odpowiedzi. Był pewien porządek. Najpierw zadania zamknięte, następnie zadania otwarte.

Przykłady zadań egzaminacyjnych z czwartego okresu

Poniżej przykład wybranych transformacji zadań z arkusza z czerwca do 2022 na typy zadań z czwartego okresu maturalnego.

P 2015, dodatkowa, Zadanie 1 (0-2 pkt.)

Dokończ zdanie. Zaznacz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba $(2\sqrt{8} - 3\sqrt{2})^2$ jest równa

A. 2 B. 1 C. 26 D. 14 E. $\left(\sqrt{8} - 3\sqrt{2}\right)^2$ F. $\sqrt{6}$ G. $6\sqrt{2}$

P 2015, dodatkowa, Zadanie 2 (0-1 pkt)

Dodatnie liczby x i y spełniają warunek $2x = 3y$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyrażenie $\frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}$ przyjmuje wartość

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{13}{6}$ C. $\frac{6}{13}$ D. $\frac{3}{2}$

P 2015, dodatkowa, Zadanie 4 (0–1 pkt)

Cena działki po kolejnych dwóch obniżkach, za każdym razem o 10% w odniesieniu do ceny obowiązującej w danym momencie, jest równa 78 732 zł.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Cena tej działki przed obiema obniżkami była, w zaokrągleniu do 1 zł, równa 97 200 zł	P	F
2.	Cena tej działki po pierwszej obniżce była, w zaokrągleniu do 1 zł, równa 87 450 zł	P	F

P 2015, dodatkowa, Zadanie 5 (0–1 pkt)

Dana jest liczba $3^{2+\frac{1}{4}}$.

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1, 2 albo 3.

A. $3^{2+\frac{1}{4}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{4}}$		**1.**	dla dodatniej liczby rzeczywistej a oraz liczb wymiernych p, q zachodzi wzór: $a^{p+q} = a^p + a^q$
B. $3^{2+\frac{1}{4}} = 3^2 + 3^{\frac{1}{4}}$	**ponieważ**	**2.**	dla dodatniej liczby rzeczywistej a oraz liczb wymiernych p, q zachodzi wzór: $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$
C. $3^{2+\frac{1}{4}} = \sqrt[9]{81}$		**3.**	dla dodatniej liczby rzeczywistej a oraz liczb naturalnych m, n zachodzi wzór: $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$

P 2015, dodatkowa, Zadanie 6 (0–2 pkt.)

Dany jest układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 22x - 22y = 2 \\ 22x + 22y = -1 \end{cases}$$

Rozwiąż ten układ równań.

Zapisz obliczenia.

P 2015, dodatkowa, Zadanie 8 (0–2 pkt.)

Dane jest równanie $2x(x^2 - 9)(x + 1) = 0$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

Iloczyn rozwiązań równania jest równy

A. −3 B. 3 C. 0 D. 9

Średnia arytmetyczna rozwiązań równania jest równa

E. 0 F. −1 G. −0,5 H. −0,25

P 2015, dodatkowa, Zadanie 11 (0–1 pkt)

Funkcja liniowa *f* jest określona wzorem $f(x) = -\frac{1}{3}(x+3)+5$.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź spośród A–C oraz odpowiedź spośród D–F.

Miejscem zerowym funkcji *f* jest liczba

A. 15 B. 12 C. 5

Wykres funkcji *f* przecina oś OY w punkcie o rzędnej równej

D. 5 E. 4 F. 3

P 2015, dodatkowa, Zadanie 28 (0–1 pkt)

Dany jest uporządkowany zestaw sześciu liczb: $2x$, 4, 6, 8, 11, 13. Średnia arytmetyczna tego zestawu jest równa 5.

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź spośród A–B oraz odpowiedź spośród C–D.

Pierwsza liczba w zestawie jest równa: A. −12 B. − 6

Mediana zestawu liczb jest równa: C. 5 D. 7

P 2015, dodatkowa, Zadanie 32 (0–1 pkt)

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$.

Wybierz zdanie prawdziwe A albo B oraz zdanie 1, 2 albo 3 uzasadniające takie stwierdzenie.

A. Wtedy $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$.

B. Wtedy $2 - \cos^2\alpha = 1{,}9$.

1. Jeżeli $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$, to $\cos\alpha = 2\sin\alpha$ oraz $5\sin^2\alpha = 4$.

2. Jeżeli $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$, to $\sin\alpha = 2\cos\alpha$ oraz $5\cos^2\alpha = 1$.

3. Jeżeli kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$, to $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

P 2015, dodatkowa, Zadanie 35 (0–4 pkt.)

Wykres funkcji kwadratowej *f* określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny.

Punkty $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$ należą do wykresu *f*.

Uzupełnij brakujące miejsca w tekście.

Druga współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest równa… .

Oś symetrii tej paraboli jest opisana równaniem… .

Współczynnik a przyjmuje wartość… .

Funkcję f można przedstawić w postaci… .

Współczynnik a przyjmuje wartość $-\frac{3}{8}$.

Na rozwiązanie arkusza na poziomie podstawowym zdający będą mieli 180 minut, czyli 10 minut więcej niż w latach poprzednich. Arkusz na poziomie rozszerzonym swoją strukturą będzie przypominał arkusze z drugiego okresu maturalnego i nadal na jego rozwiązania będzie 180 minut.

DYSKUSJA

Typy zadań maturalnych, ich jakość oraz trudność mają niewątpliwy i bezpośredni wpływ na uczniów, rodziców uczniów, a także nauczycieli matematyki. I mimo że są konstruowane na podstawie wymagań egzaminacyjnych, to stanowią praktyczny wzorzec, wręcz punkt odniesienia dla wszystkich podmiotów zaangażowanych w przygotowanie do tego doniosłego i niezwykle ważnego egzaminu, jakim jest matura z matematyki. Jakość zadań maturalnych ma też pośredni wpływ na uczelnie wyższe, autorów zbiorów zadań pomocniczych, wydawców i rynek księgarski, recenzentów, konsultantów i doradców metodycznych. Nie można zapomnieć również o stale powiększającym się rynku korepetycji i kursów pozaszkolnych, również dostępnych w internecie.

Przypomnijmy jeszcze główne funkcje egzaminu maturalnego.

Według Centralnej Komisji Edukacyjnej (CKE, 2002):

Egzamin maturalny pełni trzy zasadnicze funkcje:

1. **Wyznacza poziom spełniania** przez zdających wymagań programowych w zakresie przedmiotów, z których przystępowali do egzaminów.
2. **Stanowi poświadczenie osiągnięcia przez zdającego** wymaganego prawem **poziomu wiadomości i umiejętności w zakresie** języka polskiego, **matematyki** i wybranego języka obcego – w przypadku zdania wszystkich egzaminów obowiązkowych w części pisemnej (na poziomie podstawowym) oraz w części ustnej (bez określania poziomu).
3. **Zastępuje egzamin wstępny do szkół wyższych**, które wykorzystują wyniki egzaminu maturalnego z danego przedmiotu lub przedmiotów – przede wszystkim na poziomie rozszerzonym – jako kryteria w procesie rekrutacji.

Dobrze, że matematyka jest wśród przedmiotów głównych, obowiązkowych. Zajmuje ważne miejsce w systemie edukacji, co przekłada się również na znaczenie nauczycieli matematyki, szczególnie egzaminatorów maturalnych Okręgowych Komisji Egzaminacyjnych.

Patrząc na problem matury z matematyki z perspektywy zdającego, niezależnie od okresu maturalnego, można zaproponować zestaw pewnych praktycznych powinności. Pisał o tym Tomasz Szwed (Szwed, 2022). Należą do nich: wykonanie ciężkiej pracy; samodzielność, czyli samodzielnie rozwiązywanie zadań; różnorodność, czyli rozwiązywanie zadań różnymi metodami; strategie, czyli rozwiązywanie zadań testowych różnymi sposobami; ostrożność, czyli weryfikowanie swoich rozwiązań z kimś bardziej doświadczonym; dokładność, czyli dokładne odczytywanie treści zadań oraz precyzyjne odpowiadanie na pytanie zawarte w zadaniu otwartym; zrozumienie, czyli nieuczenie się matematyki na pamięć; wsparcie, czyli uważne słuchanie nauczyciela, a także korzystanie z właściwych zestawów wzorów maturalnych; postawienie na twórczość, czyli nieskracanie rozwiązania zadania otwartego; prostotę, czyli nieużywanie zbyt formalnego języka matematycznego na siłę; planowanie, czyli przygotowanie sobie planu powtórzeń i dobrych materiałów do ćwiczeń; współpracę, czyli rozwiązywanie zadań z innymi uczącymi się. A w kształtowaniu wszystkich wymienionych cech ważną rolę odgrywa matematyka, szczególnie jakość i typ zadań maturalnych.

BIBLIOGRAFIA

MEN (2001). Dz.U nr 92, poz. 1020, z późn. zm, Dz.U. nr 90, poz. 846, Dz.U. Nr 157, poz. 1102.

MEN (2008). Dz.U. 2012, poz. 977.

MEN (2018). Dz.U. 2018, poz. 467.

CKE (2022). *Informator maturalny z matematyki* (Dostęp: 10 września 2022) https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/Informator_EM2023_matematyka_PP.pdf

CKE (2002). *Informacja o założeniach egzaminu maturalnego* (Dostęp: 30 października 2022). https://cke.gov.pl/egzamin-maturalny/egzamin-w-starej-formule/o-egzaminie/

Szwed, T. (2022). Szczęśliwa trzynastka z matematyki. *Perspektywy*, *9–10*(204), 14–15.

Jedno zadanie – różne rozwiązania

Marta Pytlak

Uniwersytet Rzeszowski
mpytlak@ur.edu.pl
ORCID: 0000-0002-8100-6521

Streszczenie

Edukacja matematyczna odgrywa istotną rolę w rozwoju dziecka. Jednym z jej celów jest wyposażenie ucznia w niezbędną wiedzę i umiejętności matematyczne, które mogą być przydatne w życiu codziennym. Duży nacisk kładziony jest również na rozwój kreatywnego i krytycznego myślenia. Można to osiągnąć przez stawianie przed uczniem różnych zadań stymulujących kreatywność. Sprzyjają temu zadania dotyczące odkrywania reguł i zależności, w których nie ma z góry narzuconego rozwiązania. W tym referacie przedstawiam rezultaty pracy uczniów nad takim zadaniem. Uczniowie zaprezentowali różne podejścia do tego samego problemu. Jak pokazały wyniki analizy jakościowej, ważne było refleksyjne podejście do zadania i swojego rozwiązania.

Summary

Mathematics education plays an important role in a child's development. One of its goals is to equip the student with the necessary mathematical knowledge and skills that can be useful in everyday life. Great emphasis is also placed on the development of creative and critical thinking. This can be achieved by giving the student different tasks to stimulate creativity. This is achieved by tasks related to discovering rules and dependencies, in which there is no predetermined solution. In this article, I present the results of students' work on such a task. Students presented different approaches to the same problem. As the results of the qualitative analysis showed, a reflective approach to the task and its solution was important here.

W ostatnich latach wiele wysiłku włożono w reformę systemu edukacji. Zmiany dotyczyły nie tylko samego sposobu organizacji systemu, ale dotykały również warstwy programowej. Zmieniająca się rzeczywistość, w której żyjemy, wymusza zmianę w podejściu do edukacji. Edukacja matematyczna staje przed nowymi wyzwaniami. Celem nie jest tu jedynie wyposażenie ucznia w odpowiednią wiedzę. Znajomość pojęć i własności matematycznych jest istotna, ale liczy się też coś jeszcze. Istotne jest wyposażenie ucznia w pewne umiejętności i kompetencje przydatne w realnym życiu. Analizując aktualną podstawę programową dla polskiego systemu edukacji, można odnieść wrażenie, że dla jej twórców te kwestie również miały istotne znaczenie. Czytamy bowiem, że celem edukacji jest „[…] rozwijanie kompetencji, takich jak: kreatywność […]; rozwijanie umiejętności krytycznego i logicznego myślenia, rozumowania, argumentowania i wnioskowania" (MEN, 2017). Ponadto do najważniejszych umiejętności kształtowanych w ramach edukacji szkolnej podstawa programowa zalicza „kreatywne rozwiązywanie problemów". Zmiany w programie nauczania w odniesieniu do nauczania matematyki kładą główny nacisk na rozwój myślenia. Chodzi o to, aby kształcić w taki sposób, aby uczeń był osobą samodzielnie myślącą (MEN, 2017). Zatem istotnym zadaniem dla nauczycieli jest kierowanie procesem nauczania-uczenia się w taki sposób, aby uczeń mógł rozwijać swoje krytyczne i kreatywne myślenie. Uczniowie są w stanie tego dokonać, potrafią radzić sobie z różnego rodzaju problemami w życiu codziennym. „Krytyczne myślenie" ucznia oznacza tu jego umiejętność do wyszukiwania informacji, analizowania ich, do wyciągania wniosków, formułowania własnych opinii. To również umiejętność do podejmowania refleksji nad własną pracą, własnymi dokonaniami.

Uczenie matematyki różnie było i jest rozumiane. Jednak można je utożsamiać z nauczaniem myślenia, działania i porozumiewania się „matematycznego" (Arzarello, 2016). Podkreśla się zwłaszcza to, że oprócz wiedzy merytorycznej uczeń powinien również posiadać szeroki wachlarz matematycznych umiejętności, do których możemy zaliczyć umiejętność analizowania, stawiania hipotez, umiejętność argumentowania i uzasadniania, a także umiejętność krytycznego i kreatywnego myślenia. Zwłaszcza te dwie ostatnie kompetencje są szeroko brane pod uwagę jako istotne dla rozwoju wiedzy matematycznej ucznia (Oldridge, 2015).

Inną kwestią jest sam sposób organizowania procesu nauczania-uczenia się. Podkreśla się dużą rolę ucznia w odkrywaniu własnej wiedzy matematycznej. Nauczyciel powinien być drogowskazem i pomocą dla ucznia. Samodzielne dochodzenie do wiedzy ma bardziej wymierne efekty niż zwykłe „przyswajanie" podawanych gotowych informacji. Jak pisze Hejny (1998) w swojej Teorii modelu ogólnego (*Theory of Generic Model*), budowanie się wiedzy matematycznej ucznia to proces długotrwały i złożony. Składa się na niego szereg czynników. Ważnym elementem są tu doświadczenia własne ucznia. Im bogatszy zbiór doświadczeń, tym lepiej przebiega proces poznawczy. Jest on jednak różny, w zależności od tego, do jakiego świata matematyki się odnosi: arytmetyki czy geometrii. Oba są współzależne i nawzajem się przenikają i uzupełniają, chociaż mają różne korzenie i charakteryzują się różnym podejściem. Świat arytmetyki jest dokładnie ustrukturyzowany, rządzi się jasnymi regułami. Stosowane w tym świecie symbole i zapisy są jednoznacznie przez wszystkich odczytywane. Sytuacja wygląda nieco inaczej w przypadku świata geometrii. Jak podkreślają Hejny i Jirotkova (2006):

> Świat geometrii jest społecznością jednostek lub małych rodzin i istnieje duża różnorodność powiązań między nimi. Z dydaktycznego punktu widzenia arytmetyka nadaje się do systematycznego rozwijania umiejętności, a geometria jest bardziej odpowiednia dla umiejętności takich, jak eksperymentowanie, odkrywanie, kreowanie, konstruowanie, stawianie hipotez i tworzenie ministruktur. (s. 394)[1]

Zatem geometria jest dobrym punktem startowym do rozwijania myślenia matematycznego oraz kreatywnego podejścia. Zwłaszcza jeżeli idee geometryczne połączymy z poszukiwaniem regularności.

Badanie regularności, odkrywanie reguł i zależności jest jednym ze sposobów na rozwijanie myślenia matematycznego uczniów. W literaturze możemy znaleźć sporo opisów badań dotyczących odkrywania regularności i uogólniania zauważonych reguł (Stacey, 1989; Mason, 1996; García Cruz, Martinón, 1997; Sasman, Olivier, Linchevski, 1999; A. Orton, J. Orton, 1999; Zazkis, Liljedahl, 2002a, 2002b; Littler, Benson, 2005a, 2005b; Carraher, Martinez, Schliemann, 2008). Rozwiązywanie zadań dotyczących dostrzegania i odkrywania regularności ma szereg zalet. Stymuluje rozwój myślenia ucznia oraz jego kreatywność, uczy również odpowiedniego podejścia: analizy, stawiania hipotez, weryfikowania ich. Poszukiwanie regularności to jedna z metod rozwiązywania problemów. Pisze o tym E. Soboda:

> Zauważanie regularności jest umiejętnością ze wszech miar pożądaną. Czynności, w których dziecko ma zauważyć regularność, działać zgodnie z zasadą – to takie, które stymulują jego rozwój umysłowy. Są również podstawą myślenia matematycznego na każdym poziomie kompetencji matematycznych. (Swoboda, 2006, s. 51‒52)[2]

Dla ucznia zadania dotyczące odkrywania reguł są ciekawe i pełne wyzwań. Są również źródłem satysfakcji (Gruszczyk-Kolczyńska, 2001; Urbańska, 2003).

[1] W oryginale: The world of geometry is a community of individuals or small families and there is a large diversity in the linkages between them. From the didactic point of view, arithmetic is suitable for developing abilities systematically, and geometry is more suitable for abilities such as experimenting, discovering, concept creation, hypothesizing and creating mini-structures.

[2] W oryginale: Noticing the regularity is a skill desired by all means. Activities in which a child is to notice the regularity, act according to the rule – are those stimulating his mental development. They are also the basis of mathematical thinking at each level of mathematical competence

Zastosowanie zadań związanych z poszukiwaniem i dostrzeganiem zależności i regularności może wspierać rozwój refleksyjnego, krytycznego myślenia uczniów. Z drugiej strony ten rodzaj myślenia – krytycznego i refleksyjnego – może znacząco wspierać rozwój myślenia matematycznego, a w szczególności myślenia algebraicznego. Wydaje się zatem słuszne połącznie tych dwóch ważnych zagadnień: dostrzegania regularności i uogólniania oraz geometrii. Pojawiło się pytanie: Jak wykorzystać potencjał geometrii oraz zadań dotyczących odkrywania zależności i uogólniania w procesie rozwijania wiedzy matematycznej ucznia? Jak kreować zadania łączące te dwa aspekty, aby wspierały kreatywne i refleksyjne myślenie? Te pytania stały się inspiracją do przygotowania i przeprowadzenia opisanych poniżej badań.

METODOLOGIA BADAŃ

Opisane w tym referacie badania były prowadzone w ramach przygotowywania pracy magisterskiej przez studentkę kierunku matematyka na Uniwersytecie Rzeszowskim (Pikor, 2021). Badania te dotyczyły umiejętności uogólniania przez uczniów ze szkoły podstawowej z klas IV–VIII. W badaniu brało udział 34 uczniów (12 – IV, 12 – VII, 10 – VIII). Zostało ono przeprowadzone podczas jednej lekcji w każdej z trzech klas. Materiał badawczy stanowiły pisemne prace uczniów.

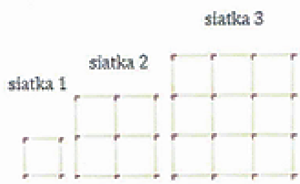
Główne pytanie badawcze brzmiało: Czy uczniowie klas IV–VIII potrafią dostrzegać zależności i dokonywać uogólnień. Chodziło przede wszystkim o sprawdzenie, jak radzą sobie z uogólnianiem zauważonych zależności uczniowie z klas IV, VI i VIII oraz jakie są różnice w podejściu do zadania dotyczącego dostrzegania zależności i uogólniania. W szczególności badanie miało pomóc w znalezieniu odpowiedzi na następujące pytania:

- Jakie strategie pracy stosują uczniowie podczas rozwiązywania zadania?
- Jakie zależności udało im się odszukać w zadaniu?
- Czy podczas pracy nad zadaniem pojawiła się refleksja i krytyczne myślenie?
- Czy sposób pracy nad zadaniem pozwolił na dostrzeżenie zależności i dokonania uogólnienia?

Materiał badawczy stanowiły prace pisemne uczniów oraz notatki z obserwacji przebiegu badania. Cały materiał badawczy został poddany analizie ilościowej i jakościowej. Analiza ilościowa miała pokazać, jakie było ogólne podejście do zadania i jak uczniowie sobie z nim radzili. Analiza jakościowa miała pokazać indywidualne podejście ucznia do zadania. W niniejszym referacie przedstawiam wyniki badań w ujęciu analizy ilościowej w odniesieniu do wszystkich klas biorących udział w badaniu. Wyniki badań w ujęciu analizy jakościowej przedstawiam jedynie w odniesieniu do klasy IV. Jest to spowodowane ograniczonym miejscem w referacie.

Narzędzie badawcze stanowiła karta pracy, na której znalazły się następujące zadania:

1. Dorysuj czwartą i piątą siatke. Podaj ilość wykorzystanych zapałek do utworzenia każdej siatki oraz ilość kwadratów, które widzisz w każdej siatce.



NR SIATKI	1	2	3	4	5
ILOŚĆ ZAPAŁEK					
ILOŚĆ KWADRATÓW					

2. Ile zapałek i kwadratów będzie w siatce 6 i 7.

str. 2/2

3. Czy da sie ułożyć siatkę złożoną z takiej samej liczby zapałek i ilości kwadratów? Odpowiedź uzasanij.

4. Czy dostrzegasz zależność między numerem siatki, a liczbą zapałek i liczba kwadratów? Jeżeli tak, to spróbuj zapisać jaką?

Rysunek 1. Narzędzie badawcze – karta pracy

Zadania zaprezentowane na karcie pracy nie narzucały sposobu metody rozwiązania. Uczniowie mieli pełną swobodę w wyborze sposobu postępowania i interpretacji treści zadania. Jako poprawne brane były pod uwagę dwa rozwiązania. Można było liczyć tylko kwadraty jednostkowe, czyli kwadraty o długości boku jednej zapałki. Wtedy sekwencja opisująca liczbę kwadratów uzyskanych przez ucznia wyglądałaby następująco: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 itd. Były to więc kwadraty kolejnych liczb naturalnych (tu: numery kolejnych siatek). W drugim podejściu można było policzyć wszystkie kwadraty, jakie tylko dało się wyróżnić w całej siatce, czyli te o boku długości jednej zapałki, o boku długości dwóch zapałek, o boku długości trzech zapałek itd. Wtedy uzyskana sekwencja opisująca liczbę kwadratów wyglądałaby następująco: 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140. Tu, aby uzyskać wynik, trzeba było dodać kolejne kwadraty liczb naturalnych od jeden do numeru danej siatki (albo do wyniku uzyskanego dla poprzedniej siatki dodać kwadrat numeru danej siatki). Oba rozwiązania zostały potraktowane jako prawidłowe. Jeśli chodzi o liczbę zapałek użytych do zbudowania kolejnych siatek, dopiero analiza wyników wpisanych do tabeli pozwoliła zauważyć odpowiednią zależność i odkryć regułę. Aby obliczyć liczbę zapałek, trzeba było dodać kolejne wielokrotności 4 do wyniku uzyskanego dla poprzedniej siatki (np. dla siatki 2: 4 + 8, dla siatki 4: 4 + 8 + 12). W związku z tym ogólna reguła była następująca: Liczba zapałek użytych do zbudowania siatki numer n jest sumą kolejnych liczb naturalnych od 1 do n pomnożoną przez 4, co można zapisać jako 2n (n + 1).

WYNIKI BADAŃ

Analiza materiału badawczego pozwoliła na wyróżnienie kilku strategii stosowanych przez uczniów (niezależnie od tego, w której klasie byli):

A – kwadrat jednostkowy – uczniowie liczyli jedynie kwadraty o boku 1 zapałki,

B – wszystkie kwadraty – uczniowie liczyli wszystkie możliwe kwadraty, jakie były widoczne w danej siatce (czyli 1 × 1, 2 × 2, 3 × 3 itd.),

C – duży kwadrat i kwadraty jednostkowe – uczniowie brali pod uwagę duży kwadrat oraz tworzące go kwadraty jednostkowe,

D – inne – różne inne podejścia uczniów, np. inne dla siatek o numerach parzystych, a inne dla nieparzystych.

Wyniki uzyskane w trakcie analizy prac uczniowskich pokazały, że dominującym podejściem uczniów było liczenie kwadratów jednostkowych. Ponadto uczniowie starali się dostrzegać zależności między liczbą kwadratów, liczbą zapałek oraz numerem siatki. Jednak nie zawsze zauważone zależności prowadziły do podania reguły ogólnej. Zbiorcze wyniki badań wszystkich uczniów biorących w nich udział przedstawia poniższa tabela:

Tabela 1. Zbiorcze wyniki badań (po wstępnej analizie materiału badawczego)

Klasa	Strategia				Liczba kwadratów		Liczba zapałek		Zauważona zależność	Uogólnienie
	A	B	C	D	popr.	błąd	popr.	błąd		
	[%]									
IV	50	25	25	0	67	33	50	50	17	0
VI	60	17	25	8	75	25	75	25	60	30
VIII	30	30	30	10	90	10	90	10	50	30
Razem	47	23	26	4	76	24	70	30	41	20

Jak możemy zauważyć w tabeli 1, wszyscy uczniowie biorący udział w badaniu podjęli próbę rozwiązania zaprezentowanych im na karcie pracy zadań. Ponadto dwa pierwsze zadania (dotyczące podania liczby kwadratów i liczby zapałek dla konkretnych siatek) zostały w większości rozwiązane poprawnie (około 76% uczniów poprawnie podało liczbę kwadratów w poszczególnych siatkach, a 70% - prawidłową liczbę zapałek). Uczniowie próbowali odkryć, dostrzec związek między liczbą kwadratów, liczbą zapałek i numerem siatki. Dużo lepiej poradzili sobie z tym uczniowie dwóch starszych klas. Potrafili powiązać numer siatki z liczbą kwadratów i liczbą zapałek. Mieli jednak spore trudności w uogólnianiu zaobserwowanych zależności i zapisywaniu ich w formie ogólnej reguły. Zapis z użyciem symboli zdecydowanie częściej pojawiał się w klasie VIII. Uczniowie klasy IV próbowali dostrzegać zależności występujące w zadaniu, a ich spostrzeżenia zazwyczaj dotyczyły samego sposobu budowania kolejnych siatek. Ze względu na to, że nie spotkali się w dotychczasowej edukacji z algebrą i zapisem algebraicznym, „nie" potrafili dokonać uogólnienia zauważonych zależności.

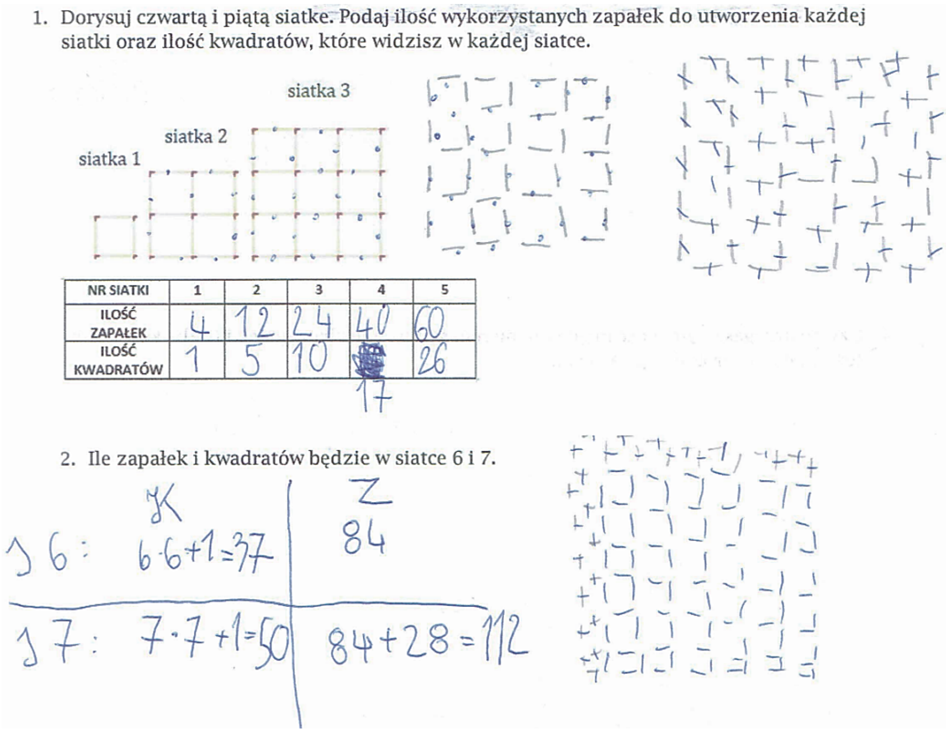
Przykłady uczniowskich rozwiązań

Uczniowie klasy IV mieli najmniejsze doświadczenie w zakresie algebry, stąd też ich podejście do rozwiązania było najbardziej intuicyjne. Poniżej przedstawiam analizę atomiczną wybranych prac uczniów z klasy IV.

Przykład 1

Uczeń S1 starał się rozwiązać wszystkie zadania. Rezultat jego pracy przedstawia rysunek 2.

Analizując rozwiązania zaprezentowane przez ucznia, możemy zauważyć, że w przypadku liczby kwadratów zastosował on strategię: duży kwadrat i kwadraty jednostkowe. Świadczą o tym zapisane obliczenia dla 6 i 7 siatki: $6 \times 6 + 1 = 37$ oraz $7 \times 7 + 1 = 50$. Takie podejście może świadczyć o tym, że uczeń dostrzegł, iż cała siatka ma kształt kwadratu, którego wymiary są równe jej numerowi. Stąd też jeden duży kwadrat jest podzielony na $n \times n$ mniejszych, jednostkowych. Takie postrzeganie silnie związane jest z aspektem wizualnym zadania. Być może aspekt wizualny był tu dominujący. Uczeń konsekwentnie stosował zauważoną zależność w dalszej części zadania. Licząc liczbę zapałek dla poszczególnych siatek w zadaniu pierwszym, uczeń skorzystał z pomocy rysunków. Liczył „na piechotę", zaznaczając każdą przeliczoną zapałkę, co możemy zauważyć na rysunkach siatek. Ta metoda sprawdziła się przy pięciu pierwszych siatkach. Przechodząc do zadania drugiego, uczeń zaczął analizować kolejne liczby i zauważył, że wartości wzrastają kolejno o 8, 12, 16, 20. Stąd też wywnioskował, że liczba zapałek w 6 siatce wzrośnie o 24, a w 7 – o 28. Tą odkrytą zależność zapisał

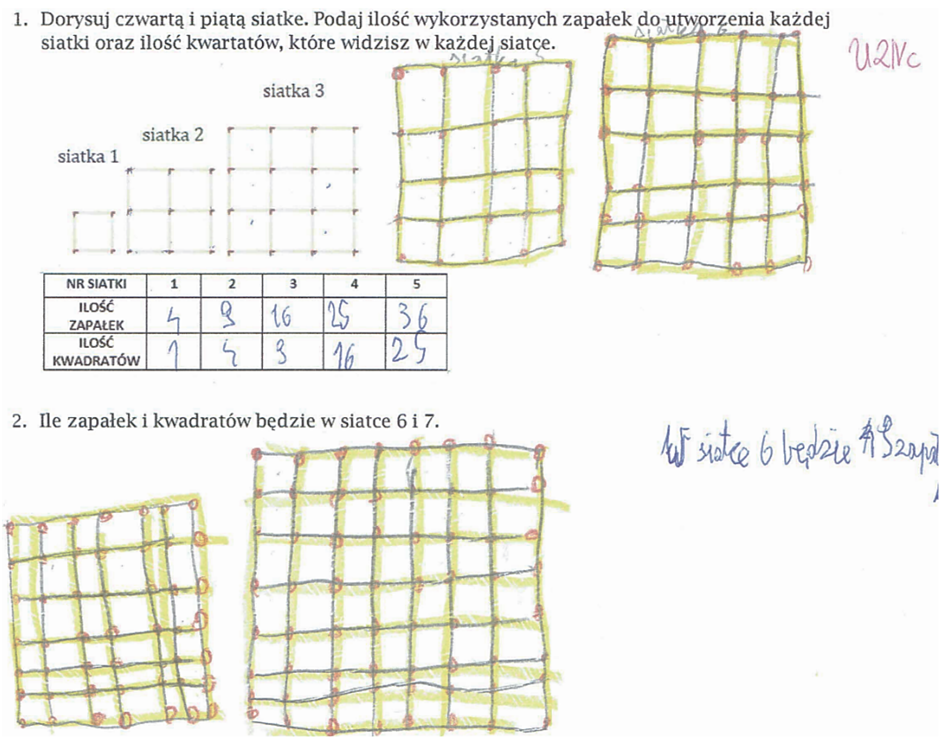


Rysunek 2. Przykład pracy ucznia S1

w dodatkowej tabelce: 84 + 28 = 112. Widoczne na rysunku siatki nr 7 kreski na zapałkach z pierwszej kolumny i pierwszego rzędu mogą wskazywać na to, że uczeń sprawdzał poprawność swojej hipotezy – przeliczone elementy to 28 zapałek. Odkrycie tej zależności możliwe było dzięki temu, że rysując kolejne siatki, uczeń zauważył, że każda następna powstaje przez dołożenie jednego rzędu i jednej kolumny do poprzedniej. Doświadczenie zdobyte podczas tworzenia kolejnych ilustracji zaowocowało odkryciem zależności arytmetycznej między poszczególnymi liczbami w wierszu „liczba zapałek". Uczeń podjął próbę udzielenia odpowiedzi na pozostałe pytania. Jednak ze względu na brak odpowiedniej wiedzy z zakresu algebry nie udało mu się zapisać dostrzeżonych zależności w formie ogólnego wzoru. Zauważył tylko, że: „siatka to kwadrat złożony z małych kwadratów, a na jeden kwadrat potrzeba czterech zapałek". Jest to w pewnym sensie uzasadnienie do zastosowanej przez niego w zadaniu reguły.

Przykład 2

Uczeń S2 w swojej pracy skupił się przede wszystkim na aspekcie wizualnym zadania. Najważniejsze dla niego było w miarę dokładne odwzorowanie siatek, stąd zwrócenie uwagi na proporcje, kolory czy też węzły będące główkami zapałek. Przystępując do rysowania, najpierw starał się narysować kwadrat odpowiednio większy od poprzedniej siatki, a następnie dzielił go na mniejsze. Dla tego ucznia istotne było policzenie kwadratów jednostkowych, z jakich składają się poszczególne siatki. Zauważył również, że liczba kwadratów w każdym wierszu i kolumnie kolejnej siatki jest taka sama jak jej numer. Stąd też liczba kwadratów to numer siatki pomnożony przez siebie. Takie też wyniki zostały wpisane w poszczególne okienka tabeli: 1, 4, 9, 16, 25. Dość zaskakująca w przypadku tego ucznia jest odpowiedź na pytanie o liczbę zapałek. Wydaje się, że sugestywne było wpisanie pierwszych dwóch liczb „4” w tabeli. To mogło skutkować odkryciem zależności: liczba zapałek w danej siatce jest taka sama, jak liczba kwadratów w kolejnej siatce. Zaś zależność geometryczna związana z liczbą kwadratów była łatwiejsza do zauważenia, stąd uczeń najpierw obliczał liczbę kwadratów, a dopiero później wpisywał na jej podstawie liczbę zapałek. Konsekwencję takiego postępowania widzimy w zapisanym rozwiązaniu do zadania 2: „w siatce 6 będzie 49 zapałek”. Dla ucznia odkrycie tych zależności było na tyle ważne, że nie widział konieczności ich weryfikacji.


1. Dorysuj czwartą i piątą siatke. Podaj ilość wykorzystanych zapałek do utworzenia każdej siatki oraz ilość kwartatów, które widzisz w każdej siatce.

U2IVc

siatka 1

siatka 2

siatka 3

NR SIATKI	1	2	3	4	5
ILOŚĆ ZAPAŁEK	4	9	16	25	36
ILOŚĆ KWADRATÓW	1	4	9	16	25

2. Ile zapałek i kwadratów będzie w siatce 6 i 7.

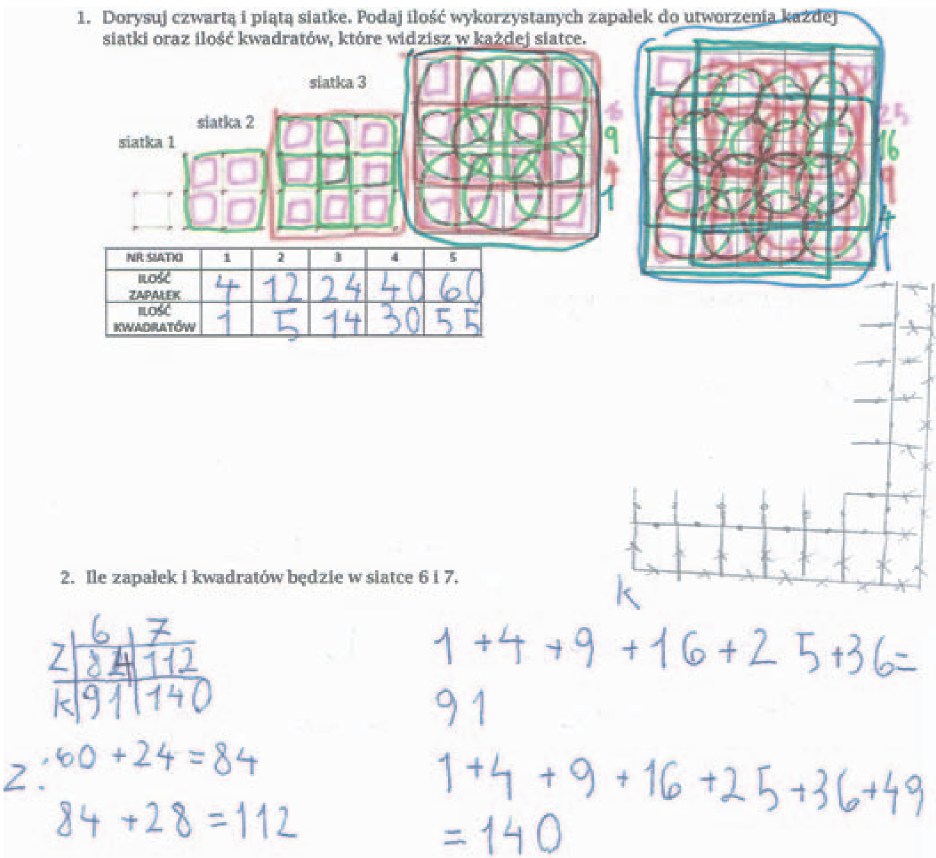
W siatce 6 będzie 49 zapał

Rysunek 3. Przykład pracy ucznia S2

Takie podejście może świadczyć o tym, że dla tego ucznia głównym celem było narysowanie kolejnych siatek. Sam sposób pracy nad zadaniem – rysowanie od razu całych kwadratów i dzielenie je na mniejsze – nie dawał większej szansy na zauważenie wielu zależności. Uzyskany w ten sposób układ szeregowo-kolumnowy narzucał niejako sposób liczenia kwadratów (nawiązanie do modelu czekoladowego mnożenia, powiązanie z liczeniem pola kwadratu).

Przykład 3

Uczennica S3 zastosowała w swojej pracy metodę B, czyli wszystkie możliwe kwadraty. Bardzo dokładnie przeanalizowała kolejne siatki. Zauważyła, że występują w nich kwadraty o różnych wymiarach. Ten fakt podkreśliła przez obrysowywanie kwadratów o tych samych wymiarach takim samym kolorem. W tej sytuacji łączna liczba kwadratów w danej siatce to suma kwadratów kolejnych liczb naturalnych od 1 do numeru siatki. To odkrycie zostało również zapisane



Rysunek 4. Praca ucznia S3

za pomocą odpowiednich działań w zadaniu 2. W pracy tego dziecka nic nie było przypadkowe. Dziewczynka zauważyła, że kolejne siatki powstają przez dorysowywanie jednego rzędu i jednej kolumny. Była świadoma, że aby policzyć liczbę zapałek do ułożenia, nie potrzebuje liczyć wszystkich elementów na poszczególnych siatkach, ale tylko te „dokładane". Uzyskany w ten sposób wynik wystarczy dodać do liczby zapałek z poprzedniej siatki i w ten sposób otrzymujemy liczbę zapałek użytych do budowy danej siatki. Potwierdzeniem zastosowania takiej właśnie strategii jest rysunek wykonany dla siatki nr 6 i 7. Właściwie jest to w pewnym sensie „dopełnienie" rysunku siatki nr 5. Uczennica nie czuła potrzeby rysowania całej siatki. Narysowała jedynie te elementy, które byłyby dołożone do siatki nr 5, aby uzyskać z niej kolejno siatkę nr 6 i 7. Dodatkowo dziewczynka zapisała swoje obliczenia, potwierdzając tym samym stosowaną strategię.

Taki sposób pracy pokazuje, że uczennica starannie przemyślała całe rozwiązanie. Potrafiła dostrzec różne zależności w zadaniu. Umiejętność wyodrębnienia różnych kwadratów z danej siatki wskazuje, że potrafi dostrzec różne struktury w tym samym obiekcie.

PODSUMOWANIE I DYSKUSJA

Dla uczniów biorących udział w badaniu, a zwłaszcza tych z klasy czwartej, postawione przed nimi zadania były wyzwaniem. Potrafili jednak całkiem dobrze sobie z nimi poradzić. Podjęli próbę rozwiązania wszystkich zadań z karty pracy. I to z dużym sukcesem. Bazując na uzyskanych wynikach, możemy zauważyć, że doświadczenie związane z budowaniem kolejnych siatek przekładało się na odkrywanie zależności, pozwalało dostrzec relacje między liczbą zapałek i liczbą kwadratów w sąsiednich siatkach. Uczniowie potrafili wyodrębnić w tym samym schemacie różne kwadraty, zarówno te jednostkowe, jak i złożone z kilku elementów. W zależności od przyjętej strategii postępowania uczniowie odkrywali różne reguły. Najszybciej była odkrywana zależność geometryczna w odniesieniu do liczby kwadratów w strategii A lub C (czyli że liczba kwadratów to numer siatki pomnożony przez siebie). Było to silnie związane z wizualną reprezentacją zadania. Refleksja nad rozwiązaniem, weryfikowanie swojego podejścia do zadania pomagały w odkrywaniu zależności. Skupienie się jedynie na aspekcie wizualnym zadania nie gwarantowało sukcesu w rozwiązaniu. Samo policzenie liczby kwadratów czy liczby zapałek dla poszczególnych siatek nie skutkowało odkryciem odpowiedniej reguły. Do tego potrzebna była analiza tych wyników bądź analiza sposobu budowania kolejnych siatek. Tam gdzie pojawiła się refleksja i krytyczne myślenie nad uzyskanymi wynikami, pojawiły się również próby sformułowania zależności (tak jak w przypadku S1 i S3). Brak weryfikacji postawionych hipotez i skupienie się jedynie na podaniu wyników powodowało brak odnalezienia odpowiednich zależności (tak jak w przypadku S2). Stąd też warto zwracać uwagę na umiejętność krytycznego podchodzenia do swoich działań. Wydaje się, że przedstawione uczniom zadania dają możliwość na rozwijanie krytycznego i kreatywnego myślenia. Aby w pełni wykorzystać ich potencjał, konieczna jest dyskusja nad zaproponowanymi rozwiązaniami. Być może wspólne analizowanie różnych strategii zastosowanych przez uczniów podczas rozwiązywania zadania dałoby możliwość na refleksję i odkrycie nowych zależności.

BIBLIOGRAFIA

Arzarello, F. (2016). Basing on an inquiry approach to promote mathematical thinking in the classroom. W: B. Maj-Tatsis, M. Pytlak, E. Swoboda (red.), *Inquiry based mathematical education* (s. 9–20). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Chamberlin, S., Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Prufrock Journal*, *17*(1), 37–47.

Carraher, D., Martinez, M., Schliemann A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 3–22.

García Cruz, J. A., Martinón, A. (1997). Actions and Invariant Schemata in Linear Generalizing Problems. W: E. Pehkonen (red.), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, t. 2 (s. 289–296). Helsinki: University of Helsinki.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2009). *Wspomaganie rozwoju umysłowego oraz edukacja matematyczna dzieci w ostatnim roku wychowania przedszkolnego i w pierwszym roku szkoły podstawowej*. Warszawa: Wydawnictwo Edukacja Polska.

Littler, G. H., Benson, D. A. (2005a). Patterns leading to generalization. W: *Proceeding of SEMT'05* (s. 202–210). Prague: Charles University.

Littler, G. H., Benson, D. (2005b). Patterns leading to Algebra. W: *IIATM-Implementation of Innovation Approaches to the Teaching of Mathematics*. Comenius 2.1.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. W: N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (red.), *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching* (s. 65–86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Johnston-Wilder, S., Graham, A. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: Sage (Paul Chapman).

MEN (2017). *Podstawa programowa z komentarzem*.

Oldridge, M. (2015). *Critical and Creative Thinking in the Math Classroom*. https://thelearningexchange.ca/critical-and-creative-thinking-in-the-math-classroom

Pytlak, M. (2006). Uczniowie szkoły podstawowej odkrywają regularności. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Naukowego*, seria 5: *Dydaktyka Matematyki*, *29*, 115–150.

Pytlak, M. (2008). Connections – as a fundamental element to constructing mathematical knowledge (exemplify of one pre-algebra task). W: B. Maj, M. Pytlak, E. Swoboda, *Sup-*

porting Independent Thinking through Mathematical Education (s. 68–76). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Sasman, M., Olivier, A., Linchevski, L. (1999). Factors influencing students' generalization thinking processes. W: O. Zaslavski (red.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, t. 4 (s. 161–168). Israel, Haifa.

Stacey, K. (1989). Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147–164.

Swoboda, E. (2006). *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Urbańska, A. (2003). O tworzeniu się pojęcia liczby u dzieci. *Zeszyty Wszechnicy Świętokrzyskiej*, *16*, 51–71.

Zazkis, R., Liljedahl, P. (2002a). Repeating patterns as a gateway. *Proceeding of 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, t. 1 (s. 213–217). Norwich, UK: University of East Anglia.

Zazkis, R., Liljedahl, P. (2002b), Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379–402.

Część III
– SUGESTIE ROZWIĄZAŃ METODYCZNYCH

SPOJRZENIE PRAKTYKA NA PODNOSZENIE EFEKTYWNOŚCI UCZENIA SIĘ MATEMATYKI

Miejsce mnemotechnik w nauczaniu matematyki

Anna Pyzara

Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie
anna.pyzara@umcs.pl
ORCID: 0000-0002-8165-3980

Streszczenie

Mnemotechniki to techniki pamięciowe pozwalające na szybsze opanowanie informacji oraz ich wydajniejsze wykorzystanie. Metody te są silnie związane z wyobraźnią oraz skojarzeniami. Mnemotechniki pozwalają uczniom na szybsze, skuteczniejsze oraz przyjemniejsze przyswajanie potrzebnych pojęć. Ułatwiają uczenie się, co wpływa pozytywnie na motywację uczniów do poszerzania swojej wiedzy. Mnemotechniki można zastosować w nauczaniu matematyki na każdym poziomie edukacyjnym. W artykule ukazane zostaną wyniki badań mających na celu zebranie informacji o mnemotechnikach stosowanych w nauczaniu matematyki oraz sprawdzenie, jaką rolę odgrywają w edukacji matematycznej. Badania zostały przeprowadzone w różnych grupach badawczych (uczniowie, nauczyciele oraz studenci matematyki o specjalizacji nauczycielskiej). Zebrane dane pokazują, że techniki szybkiego uczenia się są wykorzystywane na lekcjach matematyki w różnym stopniu, jednak badani zgodnie dostrzegają zalety płynące z zastosowania tych technik.

Summary

Mnemonics are memory techniques that allow you to learn information faster and use it more efficiently. These methods are strongly related to the imagination and associations. Mnemonics allow students to learn the concepts they need faster, more effectively and more enjoyably. They facilitate learning, which has a positive effect on students' motivation to expand their knowledge. Mnemonics can be used in teaching mathematics at any educational level. The article will present the results of research aimed at gathering information about mnemonics used in teaching mathematics and checking the role they play in mathematics education. The research was carried out in various research groups (pupils, teachers and students of mathematics with teaching specialization). The collected data show that the techniques of fast learning are used in mathematics classes to a different extent, but the respondents agree that the advantages of using these techniques are recognized.

Współczesny człowiek spotyka się każdego dnia z ogromną liczbą informacji. Otacza nas narastający szum informacyjny, czyli natłok informacji, niepozwalający na wyodrębnienie istotnych treści i utrudniający rozpoznanie ich wiarygodności. Informacji, do których możemy dotrzeć w każdej chwili, jest za dużo, aby nasz mózg był w stanie je przyswoić, tym samym musi dokonywać nieustannej selekcji treści, które do niego docierają i większość z nich usuwać z pamięci (Kaczmarzyk, 2014; Dereń, 2005). Z drugiej strony pewien zasób informacji jest konieczny do dalszego rozwoju. Uczeń, zdobywając nową wiedzę i umiejętności, chciałby, aby na trwałe pozostały one w jego pamięci. Co zrobić, aby istotne treści zostały zapisane w pamięci długotrwałej? Z pomocą przychodzą mnemotechniki, czyli techniki, które służą lepszemu zapamiętywaniu oraz przypominaniu sobie informacji na drodze skojarzeń (Dereń, 2005).

Termin *mnemotechnika* (lub *mnemonika*) pochodzi od imienia greckiej bogini pamięci i matki wszystkich muz – Mnemozyny, która wzięła swoje imię od greckiego słowa *mneme*, czyli „pamięć". Techniki pamięciowe są silnie związane z wyobraźnią oraz skojarzeniami. Mnemotechnika za pomocą pewnych sztucznych środków wspiera i rozwija wrodzone możliwości pamięci (Kalina, 1997). Polega na łączeniu pojęć trudnych do zapamiętania z tymi już poznanymi. Jeśli uczniowie (lub studenci) nawiążą wystarczająco silne połączenie, pamięć będzie trwała bardzo długo, ponieważ strategia mnemoniczna starannie powiązała ją z rzeczami, które zgodnie z tymi technikami będą dobrze znane uczniom. Takie powiązanie może być niezwykle skuteczne. Mnemotechniki pozwalają uczniom na szybsze, skuteczniejsze oraz przyjemniejsze przyswajanie potrzebnych pojęć. Umożliwiają pełne wykorzystanie potencjału indywidualnego oraz zdolności. Ułatwiają uczenie się, co wpływa pozytywnie na motywację uczniów do poszerzania swojej wiedzy (Jurowski i in., 2015; Olu-Ajayi, 2022).

Podczas stosowania mnemotechnik ulepszane są umiejętności, takie jak: wyobraźnia, wizualizacja, koncentracja uwagi, kojarzenie (Kalina, 1997). W ten sposób poprawia się działanie pamięci naturalnej. Mnemotechniki nie tylko zmniejszają czas uczenia się, ale także zwiększają ilość możliwych do zapamiętania informacji. Umożliwiają również zachowanie wiadomości w pamięci długotrwałej.

Mnemotechniki bazują na prawidłowościach wskazywanych przez neurodydaktykę, czyli naukę, która, opierając się na badaniach nad mózgiem, stawia sobie za cel poszukiwanie systemu edukacyjnego przyjaznego mózgowi i lepiej wykorzystującego jego silne strony. Neurodydaktyka bazuje na ciekawości poznawczej oraz silnych stronach uczniów. Łączy ona wiedzę teoretyczną z emocjami i skojarzeniami, ponieważ mózg ludzki jest niezwykle wyczulony na to, co nowe, nietypowe i zaskakujące. Naszą uwagę przykuwa łatwiej to, czego się nie spodziewamy. Jednocześnie nasz mózg jest „społeczny" i lubi podzielać emocje innych, w tym zainteresowanie, zachwyt czy zaskoczenie (Kaczmarzyk, 2014).

Dzięki neurobiologii oraz neuropsychologii wiadomo, co wspiera, a co blokuje proces uczenia się. Ma to bardzo ważne znaczenie dla nauczycieli, którzy mogą wykorzystać tę wiedzę w procesie nauczania. Badania prowadzone przez neurobiologów dotyczą procesu nauczania i uczenia się w ogólności (Jolles, Jolles, 2021; Kaczmarzyk, 2014). Istnieje zatem potrzeba odniesienia tych wyników do nauczania poszczególnych przedmiotów, w tym matematyki. Podobnie badania dotyczące mnemotechnik w znacznej części dotyczą wpływu tych technik na trwałość pamięci, bez odniesienia do konkretnych treści nauczania, jednak występują badania skierowane na nauczanie poszczególnych przedmiotów lub grup przedmiotów (Akinsola, Odeyemi, 2014; Jurowski i in., 2015; Jurowski i in., 2014; Ni, Hassan, 2019; Olu-Ajayi, 2022).

RODZAJE I PRZYKŁADY MNEMOTECHNIK STOSOWANYCH W NAUCZANIU MATEMATYKI

Mnemotechniki obejmują ogół technik umożliwiających trwałe zapamiętanie informacji. Techniki te nie są związane z przedmiotem nauczania, natomiast ich przykłady odnoszą się do konkretnych zagadnień. Istnieje kilka rodzajów technik pamięciowych, jednak są i takie przykłady, które trudno jednoznacznie przypisać do danej kategorii, gdyż łączą one elementy różnych technik. Znając rodzaje technik pamięciowych, możemy tworzyć własne przykłady, pozwalające zapamiętać dane treści. Natomiast nawet bez znajomości rodzajów mnemotechnik możemy korzystać z poszczególnych przykładów mnemonicznych. Ważną zaletą mnemotechnik jest to, że można je zastosować w nauczaniu na każdym poziomie edukacyjnym (w szczególności w nauczaniu matematyki) (Ni, Hassan, 2019).

Mnemotechniki najczęściej stosowane w nauczaniu to: metoda akrostychów i akronimów, rymowanki, metoda skojarzeń, łańcuchowa metoda skojarzeń, metoda haków pamięciowych, metoda lokalizacji (tzw. pałac pamięci), mapy myśli, karty do nauki (fiszki, *flash* karty). Poniżej zostaną omówione wybrane metody (przydatne w nauczaniu matematyki) wraz z przykładami (Małaszkiewicz, 2021; Ni, Hassan, 2019; Jurowski i in., 2015; Dereń, 2005).

Metoda akrostychów – polega na stworzeniu zabawnego lub absurdalnego zdania, w którym poszczególne wyrazy zaczynają się na pierwsze litery słów lub wyrażenia, które chcemy zapamiętać.

Przykład 1: Chcąc zapamiętać kolejne symbole liczb rzymskich L, C, D, M, można utworzyć zdanie „Lecą Cegły, Dom Murują” lub „Lubię Ciebie, Droga Matmo”. Pierwsze litery kolejnych słów odpowiadają symbolom cyfr rzymskich ustawionych w kolejności rosnącej. Tym samym, pamiętając, że cyfry te odpowiadają wartościom: 50, 100, 500 i 1000, możemy przyporządkować wartość do poszczególnych znaków. Można znaleźć wiele przykładów do zapamiętania tych symboli, ale najlepszym sposobem jest wymyślenie własnych zdań.

Metodą podobną do metody akrostychów jest tworzenie tzw. *pi-ematów*. Są to zdania lub wiersze, w których liczba liter kolejnych słów wyrażenia odpowiada kolejnym cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby *pi*.

Przykład 2: Można zapamiętać następujące przybliżenie liczby $\pi \approx 3{,}1415926535$ dzięki samodzielnie ułożonemu zdaniu lub korzystając z gotowego *pi-ematu*, np. „Kto z woli i myśli zapragnie *pi* spisać cyfry, ten zdoła".

Przykład 3: Zapamiętanie większej liczby cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π umożliwia wiersz Kazimierza Cwojdzińskiego z 1930 roku:

Kuć i orać w dzień zawzięcie,	3,14159
bo plonów nie ma bez trudu.	26 535
Złocisty szczęścia okręcie,	897
kołyszesz...	9
Kuć! My nie czekajmy cudu.	32 384
Robota to potęga ludu!	6264

Powyższy wiersz pomaga zapamiętać 23 cyfry liczby π. Innym wierszem opartym na tej technice jest *Inwokacja do Mnemozyny* Witolda Rybczyńskiego, który pozwala na zapamiętanie 36 cyfr liczby π. Przedstawiona tu mnemotechnika może zostać wykorzystana do zapamiętania innych liczb, np. do zapamiętania kilku lub kilkunastu cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{2}$.

Akronimy (czyli *skrótowce*) – polegają na stworzeniu słowa złożonego z pierwszych liter wyrazów lub wyrażeń, których próbujemy się nauczyć.

Rymowanka – to wierszyk lub werset, które używają na końcu frazy słów kończących się tym samym dźwiękiem (rymujących się).

Przykład 4: Wierszyk, który pozwala zapamiętać wzór na pole i obwód koła:
„Jak to ładnie, pięknie brzmi:
obwód koła «dwa er *pi*»,
pole zaś «er kwadrat *pi*»,
niech w pamięci zawsze tkwi".

Przykład 5: Rymowanki ułatwiające zapamiętać wynik mnożenia liczb 7 i 8:
„Gruszka jest dojrzała i trzeba ją zjeść,
siedem razy osiem jest pięćdziesiąt sześć".
„Gdy siódemek osiem zbierzesz,
masz pięćdziesiąt sześć bankierze".

Dodatkowo wynik mnożenia liczb 7 i 8 można również zapamiętać przez zauważenie, że liczby 5, 6, 7, 8 są ułożone w odpowiedniej kolejności ($56 = 7 * 8$).

Przykład 6: Wierszyk, który pozwala zapamiętać kolejność wykonywania działań:

„Najpierw matematyczny asie,
wykonuj działania w nawiasie.
Potem umyśle tęgi,
obliczaj pierwiastki i potęgi.
Następnie dziel i mnóż,
a wynik tuż-tuż.
Na koniec dodawaj i odejmuj,
i o wynik się nie przejmuj".

Przykład 7: Rymowanka, która ułatwia zapamiętanie znaków funkcji trygonometrycznych w ćwiartkach układu współrzędnych:

„W pierwszej ćwiartce same plusy,
w drugiej tylko sinus,
w trzeciej tangens i cotangens,
a w czwartej cosinus".

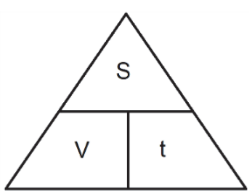
Metoda skojarzeń – polega na wyszukaniu lub utworzeniu związku, skojarzenia z informacjami, które należy zapamiętać. Powstała relacja nie musi być logiczna ani realistyczna, ważne jest, aby związek wyzwalał twoją pamięć.

Przykład 8: Sposoby na zapamiętanie znaków sumy i iloczynu zbiorów.

Znak ∪ wyglądem przypomina literę **u**, która występuje w słowie s**u**ma. Natomiast ∩ przypomina literę **n**, która występuje w słowie iloczy**n**.

Znak ∪ wyglądem przypomina uśmiech, czyli „suma jest szczęśliwa", bo ma dużo elementów. Natomiast ∩ przypomina smutny kształt ust, czyli „iloczyn zbiorów jest smutny", bo ma mało elementów.

Przykład 9: Do zapamiętania wzorów na prędkość, drogę i czas służy tak zwany trójkąt svt. Wystarczy zapamiętać odpowiednie rozmieszczenie liter używanych we wzorach na trójkącie i odczytywać litery obok siebie jako iloczyn, zaś litery jedna nad drugą jako iloraz. Rozmieszczenie to pozwala w prosty sposób odczytać wybrany wzór. Na rysunku poniżej widać, że droga to iloczyn prędkości i czasu (litery są obok siebie). Prędkość to iloraz drogi i czasu (litery są jedna nad drugą) oraz czas to iloraz drogi i prędkości (litery są jedna nad drugą).



Rysunek 1. Trójkąt svt pozwalający zapamiętać wzór na prędkość, drogę i czas

Łańcuchowa metoda skojarzeń – służy zapamiętaniu informacji w określonej kolejności, przez wykorzystanie skojarzeń, które łączą poszczególne elementy w całość, tworząc dynamiczną, emocjonalną historyjkę, w którą angażowane są wszystkie zmysły. Modyfikacją tej techniki jest *układanie historyjek*, które wspomagają zapamiętanie informacji przez tworzenie zaskakujących lub humorystycznych skojarzeń.

Przykład 10: Zapamiętanie, czym są liczby bliźniacze, jest możliwe dzięki poniższej historyjce.

> Liczbom pierwszym było smutno, gdy patrzyły na liczby złożone, bo nie mają innych dzielników niż dzielniki niewłaściwe. Chciałyby mieć kogoś bliskiego i zaczęły rozglądać się po liczbach. Zauważyły, że niektóre z nich są odległe od siebie o 2 i jednocześnie obie są pierwsze. Ktoś bliski i podobny jest jak bliźniak. Bliźniaków jest dwoje i różnią się tylko o 2. Zatem jeśli liczba pierwsza plus 2 też jest pierwsza, to mamy bliźnięta, czyli liczby bliźniacze.

Metoda haków pamięciowych – polega na wprowadzeniu trwale do pamięci odniesień (haków pamięciowych), które wykorzystywane są do tworzenia skojarzeń.

Składa się z trzech etapów:

- stworzeniu listy słów, tzw. haków, gdzie każdy hak posiada swój numer porządkowy – jest on na stałe wprowadzony do systemu pamięciowego,
- łączenie przez skojarzenie informacji do zapamiętania z danym hakiem,
- przywołanie danego haka, aby przywołać daną informację.

Przykład 11: Możemy zapamiętać na stałe: 1 jako świecę, 5 jako haczyk, zaś 7 jako kosę. Wówczas chcąc zapamiętać liczbę 571, wystarczy wyobrazić sobie haczyk, na którym wisi kosa, która płonie od spodu od płomienia świecy.

Mapa myśli – to metoda inteligentnego notowania wspierająca uczenie się, zapamiętywanie i przypominanie informacji, a także służąca organizowaniu, kategoryzowania i przechowywaniu wiedzy. Opiera się na wizualizacji i symbolicznym ukazywaniu informacji.

METODOLOGIA

Celem badań jest sprawdzenie miejsca mnemotechnik w nauczaniu matematyki w polskich szkołach. Główne pytanie badawcze (P0) brzmi: „Czy mnemotechniki odgrywają istotną rolę w nauczaniu matematyki?". Poszukiwanie na nie odpowiedzi usprawniły dwa dodatkowe pytania:

P1: Jakie mnemotechniki są stosowane w nauczaniu matematyki?,

P2: Czy stosowanie mnemotechnik przynosi korzyści w nauczaniu matematyki?

Badanie zostało przeprowadzone za pomocą anonimowych ankiet przygotowanych w trzech wersjach (dla uczniów, dla nauczycieli matematyki, dla studentów matematyki kierunków nauczycielskich – przyszłych nauczycieli). Ankiety zostały przygotowane za pomocą formularzy Google i udostępnione za pośrednictwem linków do wybranych grup badawczych na terenie województwa lubelskiego. Dane były zbierane od maja 2021 do maja 2022 roku. W badaniu wzięło udział 130 uczniów, 23 studentów i 22 nauczycieli. Ankiety zawierały od 10 do 16 pytań różnego typu (pytania otwarte, pytania zamknięte jednokrotnego lub wielokrotnego wyboru). Dwa początkowe pytania pozwalały dokładniej określić grupy badawcze (typ szkoły „podstawowa czy ponadpodstawowa", klasa, rok studiów, lata pracy). Pozostałe pytania dotyczyły znajomości mnemotechnik oraz opinii na temat ich roli w nauczaniu matematyki. Ze względu na obszerność narzędzia badawczego, dokładna treść pytań została zaprezentowana w tabelach wraz z odpowiedziami badanych w następnym paragrafie.

ANALIZA ODPOWIEDZI – WYNIKI ANKIET I DYSKUSJA

Ankieta dla uczniów

Ankieta dla uczniów zawierała pytania zamknięte jednokrotnego wyboru oraz pytania otwarte umożliwiające obszerne odpowiedzi. Dwa początkowe pytania posłużyły do dokładniejszego określenia grupy badawczej.

Tabela 1. Odpowiedzi uczniów na pytania 1‒2

<table>
<tr><th>Pytania dla uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów w [%]</th></tr>
<tr><td>Do jakiej szkoły uczęszczasz?
Szkoła podstawowa
Szkoła ponadpodstawowa</td><td>
30
100</td><td>
23
77</td></tr>
<tr><td>W której jesteś klasie?
1.
2.
<table>
<tr><th>Pytania dla uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów [%]</th></tr>
<tr><td>Czy lubisz matematykę?
Tak
Nie
Niektóre działy lubię, innych nie</td><td>
36
23
71</td><td>
28
18
54</td></tr>
</table>
</td><td>
33
58</td><td>
25
45</td></tr>
</table>

cd. tab. 1

<table>
<tr><th>Pytania dla uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów w [%]</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Pytania dla uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów</th><th>Odpowiedzi uczniów [%]</th></tr>
<tr><td>Czy masz problem z zapamiętywaniem różnych informacji z matematyki?
Tak
Nie
To zależy od działu</td><td>

22
18
90</td><td>

17
14
69</td></tr>
<tr><td>W jaki sposób uczysz się definicji i praw matematycznych?
Na pamięć
Poprzez fiszki
Rozwiązując zadania z ich użyciem
Poprzez skojarzenia
Inna odpowiedź…</td><td>

30
3

75
20
2: nie uczę się</td><td>

23
2

58
15
2</td></tr>
<tr><td>Czy uczenie się matematyki przez czytanie i powtarzanie jest Twoim zdaniem skuteczne?
Tak
Nie</td><td>

68
62</td><td>

52
48</td></tr>
<tr><td>Czy lubisz uczyć się matematyki poprzez gry i zabawy dydaktyczne?
Tak
Nie</td><td>

74
56</td><td>

57
43</td></tr>
<tr><td>Czy znane Ci są techniki szybkiego uczenia się (tzw. mnemotechniki – sposoby ułatwiające uczenie się, tj. wierszyki, rymowanki, skojarzenia)?
Tak
Nie</td><td>

60
70</td><td>

46
54</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.
4.
5.
6.
7.
8.</td><td>9
1
0
7
17
5</td><td>7
1
0
5
13
4</td></tr>
</table>

W ankiecie wzięło udział trzydziestu uczniów szkoły podstawowej oraz stu uczniów szkoły ponadpodstawowej. Tabela 3 ukazuje charakterystykę uczniów biorących udział w ankiecie.

Tabela 2. Charakterystyka uczniów biorących udział w badaniu

Typ szkoły \ Klasa	1	2	3	4	5	6	7	8
Szkoła podstawowa	-	-	-	1	-	7	17	5
Szkoła ponadpodstawowa	33	58	9	-	-	-	-	-

Większość ankietowanych to uczniowie szkół ponadpodstawowych (77%), głównie klasy 2, natomiast odpowiedzi udzielili również uczniowie szkół podstawowych (23%), głównie starszych klas. Przeprowadzone badanie dotyczy doświadczeń uczniów, tym samym korzystne jest to, że respondenci mają kilkuletnie doświadczenia nauczania szkolnego.

Tabela 3. Odpowiedzi uczniów na pytania 3–8

Pytania dla uczniów	Odpowiedzi uczniów	Odpowiedzi uczniów w [%]
Czy lubisz matematykę?		
Tak	36	28
Nie	23	18
Niektóre działy lubię, niektóre nie	71	54
Czy masz problem z zapamiętywaniem różnych informacji z matematyki?		
Tak	22	17
Nie	18	14
To zależy od działu	90	69
W jaki sposób uczysz się definicji i praw matematycznych?		
Na pamięć	30	23
Poprzez fiszki	3	2
Rozwiązując zadania z ich użyciem	75	58
Poprzez skojarzenia	20	15
Inna odpowiedź: …	2: nie uczę się	2
Czy uczenie się matematyki przez czytanie i powtarzanie jest Twoim zdaniem skuteczne?		
Tak	68	52
Nie	62	48

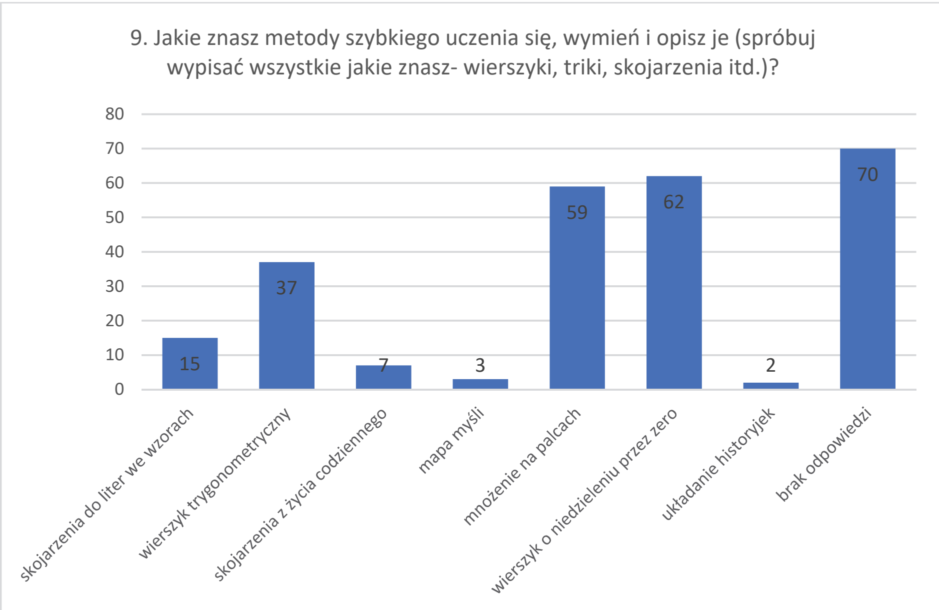
cd. tab. 3

Pytania dla uczniów	Odpowiedzi uczniów	Odpowiedzi uczniów w [%]
Czy znane Ci są techniki szybkiego uczenia się (tzw. mnemotechniki – sposoby ułatwiające uczenie się, tj. wierszyki, rymowanki, skojarzenia)?		
Tak	60	46
Nie	70	54

Udzielone odpowiedzi pokazują, że uczniowie biorący udział w badaniu mają różny stosunek do matematyki. Ponad połowa (54%) z nich lubi niektóre działy matematyki, a niektóre nie. 28% badanych deklaruje, że lubi matematykę, natomiast 18% respondentów nie lubi tego przedmiotu. Oznacza to, że dana grupa badawcza może być traktowana jako reprezentatywna, ponieważ przedstawia różne nastawienia do analizowanego przedmiotu. 17% badanych deklaruje, że ma problem z zapamiętywaniem informacji z matematyki (są to głównie uczniowie, którzy nie lubią tego przedmiotu), natomiast 69% respondentów podaje, że problemy z zapamiętaniem pojawiają się w niektórych działach. Tylko 14% uczniów nie ma problemów z zapamiętaniem matematycznych informacji.

Uczniowie deklarują, że ucząc się definicji i praw matematycznych, najczęściej rozwiązują zadania z ich użyciem (58%), lecz także uczą się na pamięć (23%) oraz wykorzystują skojarzenia (15%). Ponad połowa respondentów preferuje zdobywanie wiedzy matematycznej przez praktyczne zastosowanie jej w rozwiązywaniu zadań. Są uczniowie (15%), którzy stosują skojarzenia, co może świadczyć o stosowaniu mnemotechnik. Niemal co czwarty badany uczy się definicji i praw matematycznych na pamięć. Ci uczniowie są w grupie tych, którzy uważają, że uczenie się matematyki przez czytanie i powtarzanie jest skuteczne – tak deklaruje 52% respondentów, 48% uczniów uważa czytanie i powtarzanie za niewystarczające do nauki matematyki. Ponad połowa (57%) uczniów podała, że lubi uczyć się matematyki przez gry i zabawy dydaktyczne, zaś pozostali nie są zwolennikami tych metod. Powyższe dane pokazują, że zdania uczniów na temat sposobów zdobywania wiedzy i umiejętności matematycznych są podzielone. Podobnie jest ze znajomością mnemotechnik – 46% badanych podaje, że zna mnemotechniki, zaś 54% – nie. W tym pytaniu określenie „mnemotechniki" zostało wyjaśnione, tym samym uczniowie mieli możliwość odpowiedzieć na to pytanie, nawet jeśli nie znali wcześniej tego pojęcia.

Pytanie 9 było pytaniem otwartym. Brzmiało następująco: „Jakie znasz metody szybkiego uczenia się, wymień i opisz je (spróbuj wypisać wszystkie, jakie znasz – wierszyki, triki, skojarzenia itd.)?". Badani podawali swoje odpowiedzi w formie opisu. Udzielone odpowiedzi można przyporządkować do siedmiu grup, które zostały zaprezentowane na wykresie wraz z liczbą określającą, ile osób wymieniło daną mnemotechnikę. Uczniowie mogli wskazywać kilka metod w swojej wypowiedzi, natomiast 70 uczniów nie podało odpowiedzi na to pytanie – są to osoby, które zadeklarowały, że nie znają technik szybkiego uczenia się.



Rysunek 2. Wykres ukazujący odpowiedzi uczniów na pytanie 9

Najbardziej popularną mnemotechniką wśród ankietowanych okazały się rymowanki. Najczęściej podawany był wierszyk o niedzieleniu przez zero. W swoich odpowiedziach podano tę technikę aż 62 razy (kilku uczniów podało dwie rymowanki dotyczące tej zależności). Drugą mnemotechniką z tej kategorii znaną uczniom jest wierszyk pomagający zapamiętać znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych – podano go 37 razy, co oznacza, że tylko połowa z badanych uczniów drugich i trzecich klas szkół ponadpodstawowych zna tę technikę.

Metodą wskazaną przez większość uczniów (59) deklarujących znajomość mnemotechnik jest technika mnożenia na palcach (głównie mnożenie liczb jednocyfrowych przez 9). Trzy osoby sporządzają do nauki mapę myśli i dzięki symbolicznej wizualizacji najważniejszych informacji starają się je uporządkować i zapamiętać.

Pozostałe mnemotechniki wskazane przez uczniów opierają się na budowaniu skojarzeń. Piętnaście osób podczas nauki wzorów korzysta ze skojarzeń do liter występujących we wzorach – wykorzystują oni metody akronimów i akrostychów. Siedmiu uczniów do zapamiętania informacji wykorzystuje skojarzenia z życia codziennego. Dwóch ankietowanych uczniów układa historyjki, aby łatwiej zapamiętać informacje.

Uczniowie, którzy zadeklarowali znajomość mnemotechnik (60 osób), łącznie podali 185 powtarzających się przykładów, co oznacza, że średnio każdy z nich podał po 3 przykłady. Techniki podane przez uczniów są mnemotechnikami. Uczniowie stosują je, nawet jeśli nie znali wcześniej pojęcia „mnemotechniki". Oznacza to, że nie jest uczniom potrzebna wiedza na temat rodzajów mnemotechnik. Wystarczająca jest znajomość konkretnych przykładów mnemotechnik, które pomagają w nauce, w szczególności nauce matematyki.

Tabela 4. Odpowiedzi uczniów na pytanie 10

Pytania do uczniów	Odpowiedzi uczniów	Odpowiedzi uczniów w [%]
Czy chciałbyś poznać więcej mnemotechnik?		
Tak	78	60
Nie	8	6
Nie wiem	44	34

Odpowiedzi uczniów na 10 pytanie mogą sugerować konieczność przeprowadzenia bardziej szczegółowego badania. Mianowicie liczba uczniów, którzy deklarują chęć poznania kolejnych mnemotechnik, jest zbliżona do liczby uczniów, którzy znają techniki szybkiego zapamiętywania, natomiast aż 34% badanych nie ma zdania na ten temat. Być może ankietowani byli niezdecydowani, jednak istnieje podejrzenie, że określenia „techniki szybkiego uczenia się" i „mnemotechniki" nie zostały przez uczniów zrozumiane (mimo umieszczonego wyjaśnienia). Tym samym warto rozszerzyć przedstawione badanie, aby dokładnie zweryfikować, czy uczniowie, którzy deklarują nieznajomość mnemotechnik, faktycznie ich nie znają, czy jedynie nie rozumieją wspomnianych wyżej określeń. Jest to obszar do dalszych szczegółowych badań.

Podsumowując wyniki ankiet dla uczniów, ponad połowa badanych (54%) stwierdziła, że nie zna mnemotechnik. Pozostali uczniowie (46%) podawali dużo przykładów wierszyków, skojarzeń oraz innych technik szybkiego uczenia się. Wielu uczniów korzysta z mnemotechnik, nawet jeśli nie są tego świadomi. Stosowane techniki opierają się głównie na rymach oraz skojarzeniach, choć pojawiają się też inne metody (akrostychy, mapy myśli). Większość ankietowanych wyraża chęć poznania innych przykładów mnemotechnik, co może świadczyć o pozytywnym postrzeganiu mnemotechnik przez uczniów.

Ankieta dla nauczycieli

Ankieta dla nauczycieli zawierała pytania zamknięte jednokrotnego wyboru oraz pytania otwarte umożliwiające obszerne odpowiedzi. Dwa początkowe pytania posłużyły do dokładniejszego określenia grupy badawczej.

Tabela 5. Odpowiedzi nauczycieli na pytania 1–2

Pytania do nauczycieli	Odpowiedzi nauczycieli	Odpowiedzi nauczycieli w [%]
Jaki jest Pana/Pani staż pracy?		
mniej niż 5 lat	6	27
5–10 lat	8	36
11–20 lat	3	14
więcej niż 20 lat	5	23
W jakim typie szkoły Pan/Pani pracuje?		
Szkoła podstawowa	10	45
Szkoła ponadpodstawowa	12	55

W badaniu wzięło udział 22 nauczycieli matematyki, w tym 10 osób pracujących w szkole podstawowej oraz 12 w szkole ponadpodstawowej. Staż pracy ankietowanych został przedstawiony w tabeli poniżej.

Tabela 6. Staż pracy nauczycieli dla poszczególnych typów szkół

Typ szkoły\Staż pracy	Mniej niż 5 lat	5–10 lat	11–20 lat	Więcej niż 20 lat
Szkoła podstawowa	4	4	1	1
Szkoła ponadpodstawowa	2	4	2	4

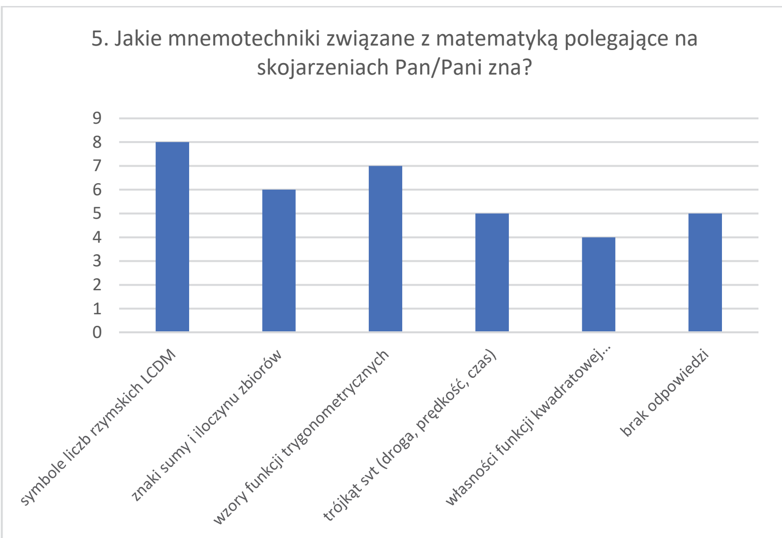
Grupa nauczycieli biorących udział w badaniu jest niewielka, jednak są to przedstawiciele każdej z podkategorii typu szkoły i stażu pracy. Tym samym przeprowadzone badanie pozwala nakreślić sposób postrzegania przez nauczycieli roli mnemotechnik w nauczaniu matematyki.

Tabela 7. Odpowiedzi nauczycieli na pytania 3-4

Pytania dla nauczycieli	Odpowiedzi nauczycieli	Odpowiedzi nauczycieli w [%]
Czy termin mnemotechniki był Panu/Pani znany (mnemotechniki – sposoby służące lepszemu zapamiętywaniu, przechowywaniu i odtwarzaniu informacji, które skracają proces nauki. Wykorzystują one trzy podstawowe zasady – skojarzenie, kontekst oraz wyobraźnię, np. wierszyki, rymowanki, skojarzenia itd.)?		
Tak	19	86
Nie	3	14
Czy używa Pan/Pani mnemotechnik przy nauczaniu matematyki?		
Prawie na każdych zajęciach	1	5
Przy niektórych tematach	19	86
Nigdy	2	9

W pytaniu 3 przedstawiono definicję pojęcia „mnemotechniki", aby badani, którzy nie znali tego pojęcia wcześniej, mogli udzielić odpowiedzi na pozostałe pytania w ankiecie. Jest to istotne, ponieważ istnieje możliwość, że ktoś korzysta z mnemotechnik, nie mając świadomości nazwy tej techniki.

Odpowiedzi badanych pokazują, że zdecydowana większość nauczycieli (86%) zna pojęcie mnemotechnika. Ankietowani (3 osoby) nieznający tego ter-



Rysunek 3. Odpowiedzi na pytanie 5 ankiety dla nauczycieli

minu to nauczyciele ze stażem pracy powyżej 10 lat. Odpowiedzi na pytanie 4 wskazują, że tylko 2 nauczycieli nie stosuje mnemotechnik w nauczaniu matematyki – są to nauczyciele uczący w szkłach podstawowych ze stażem powyżej 10 lat. Jedna osoba stosuje mnemotechniki prawie na każdych zajęciach, natomiast większość respondentów (86%) używa technik szybkiego zapamiętywania przy niektórych tematach.

Pytania 5 i 6 to pytania otwarte, w których respondenci mogli wypisać kilka metod. W pytaniu 5 nauczyciele zostali zapytani o mnemotechniki polegające na skojarzeniach. Wskazywali konkretne przykłady (wymienionych zostało 5 mnemotechnik). Z badania wynika, że wśród nauczycieli matematyki najbardziej znaną mnemotechniką polegającą na skojarzeniach są akrostychy służące do zapamiętania symboli liczb rzymskich. W swoich odpowiedziach wymieniło je 8 nauczycieli. Wymieniona została również metoda do zapamiętania znaków sumy i iloczynu zbiorów, którą znało 6 nauczycieli. Technikę do zapamiętania wzorów funkcji trygonometrycznych wymieniło w swoich odpowiedziach 7 ankietowanych. Pięć osób podało w swoich odpowiedziach „trójkąt svt", służący do zapamiętania wzorów na drogę, prędkość i czas. Czterech ankietowanych podało sposób do zapamiętania własności funkcji kwadratowej (jeśli współczynnik a jest dodatni, to funkcja jest „uśmiechnięta" – parabola ma ramiona w górę, jeśli współczynnik a jest ujemny, to funkcja jest „smutna" – parabola ma ramiona w dół). Pięciu nauczycieli nie udzieliło odpowiedzi na pytanie. Pozostałych 17 nauczycieli wskazało łącznie 30 powtarzających się przykładów, czyli średnia liczba podanych przez te osoby przykładów jest mniej niż 2. Tym samym część z nich podało tylko po jednym przykładzie.

Pytanie 6 (Jakie wierszyki pomagające zapamiętać informacje matematyczne Pan/Pani zna?) dotyczyło mnemotechnik opartych na rymie (rymowanki, wierszyki). Nauczyciele wymienili łącznie tylko 4 różne przykłady:

- wierszyk o znakach funkcji trygonometrycznych w ćwiartkach układu współrzędnych (11 osób),
- wierszyki o wzorach na pole i obwód koła (5 osób),
- wierszyk o niedzieleniu przez zero (7 osób),
- wierszyk o wyniku mnożenia liczb 7 i 8 (6 osób).

Łącznie wszystkich wskazań było 27. Trzy osoby nie udzieliły odpowiedzi (były to osoby, które nie znały pojęcia mnemotechnik), co oznacza, że wśród 19 nauczycieli podających odpowiedzi średnia liczba podanych wierszyków to 1,4 (zatem ponad połowa wskazała tylko jedną rymowankę). Najbardziej popularnym wśród nauczycieli wierszykiem pomagającym zapamiętać informacje matematyczne jest wierszyk o znakach funkcji trygonometrycznych. Łącznie w odpowiedziach na pytania 5 i 6 nauczyciele wskazali 57 przykładów, co oznacza, że osoby udzielające odpowiedzi znają średnio po 3 mnemotechniki.

Kolejne pytania dotyczyły opinii nauczycieli na temat roli mnemotechnik w nauczaniu matematyki. Badania pokazały, że większość nauczycieli (91%) uważa mnemotechniki za pomocne w nauczaniu matematyki. Natomiast różne opinie mają nauczyciele na temat wpływu mnemotechnik na wyniki uczniów oraz ich zainteresowanie lekcją. Ponad połowa badanych wskazała, że to, czy uczniowie osiągają lepsze wyniki po zastosowaniu mnemotechnik, zależy od klasy (36%) lub zależy od treści nauczania (32%). Lepsze wyniki uczniów dostrzega 5 nauczycieli, a 7 dostrzega większe zainteresowanie uczniów lekcją po zastosowaniu mnemotechnik. Ponad połowa badanych (59%) stwierdza, że wpływ mnemotechnik na zainteresowanie uczniów matematyką jest zależny od konkretnej klasy. Dwóch nauczycieli nie uważa mnemotechnik za pomocne oraz nie dostrzega ich pozytywnego wpływu na wyniki i zainteresowanie uczniów (są to nauczyciele ze szkoły podstawowej ze stażem dłuższym niż 10 lat). Co ciekawe, tylko jeden nauczyciel podał, że mnemotechniki nie powinny być stosowane na lekcjach matematyki, natomiast 95% badanych opowiedziało się za ich stosowaniem.

Tabela 8. Odpowiedzi nauczycieli na pytania 7–10

Pytania do nauczycieli	Odpowiedzi nauczycieli	Odpowiedzi nauczycieli w [%]
Czy uważa Pan/Pani mnemotechniki za pomocne przy nauczaniu matematyki?		
Tak	20	91
Nie	2	9
Czy zauważa Pan/Pani lepsze wyniki uczniów po zastosowaniu mnemotechnik?		
Tak	5	23
Nie	2	9
To zależy od klasy	8	36
To zależy od treści nauczania	7	32
Czy zauważa Pan/Pani większe zainteresowanie uczniów lekcją przy stosowaniu mnemotechnik?		
Tak	7	32
Nie	2	9
To zależy od klasy	13	59
Czy uważa Pan/Pani, że mnemotechniki powinny być stosowane w nauczaniu matematyki?		
Tak	21	95
Nie	1	5

Pytanie 11 jest pytaniem otwartym i brzmi następująco: Dlaczego Pan/Pani uważa, że mnemotechniki powinny/nie powinny być stosowane w nauczaniu matematyki? Nauczyciele poproszeni o uzasadnienie swojej odpowiedzi z pytania 10 podali dwa rodzaje argumentów. Stwierdzili, że mnemotechniki powinny być stosowane w nauczaniu matematyki, bo:

- ułatwiają zapamiętywanie (16 osób),
- urozmaicają lekcję (5 osób).

Nauczyciel, który jest przeciwny stosowaniu technik szybkiego uczenia się, nie podał uzasadnienia swojego zdania.

Podsumowując, z ankiety wynika, że większość nauczycieli zna pojęcie mnemotechniki. Ankietowani uważają techniki szybkiego uczenia się za przydatne podczas nauczania matematyki, jednak stosowanie ich jest zależne od treści nauczania i klasy, w której przeprowadzane są zajęcia.

Ankieta dla studentów

Ankieta dla studentów zawierała pytania zamknięte jednokrotnego i wielokrotnego wyboru oraz pytania otwarte umożliwiające obszerne odpowiedzi.

Tabela 9. Odpowiedzi studentów na pytanie 1

Pytania do studentów	Odpowiedzi studentów	Odpowiedzi studentów w [%]
Na którym roku studiów jesteś?		
1. rok I stopnia	4	17
2. rok I stopnia	8	35
3. rok I stopnia	11	48

W ankiecie wzięło udział 23 studentów kierunku „nauczanie matematyki i informatyki" studiów licencjackich.

Tabela 10. Odpowiedzi studentów na pytania 2–6

Pytania do studentów	Odpowiedzi studentów	Odpowiedzi studentów w [%]
W jaki sposób uczysz się definicji i praw matematycznych?		
Na pamięć	13	57
Poprzez fiszki	5	22

cd. tab. 10

Pytania do studentów	Odpowiedzi studentów	Odpowiedzi studentów w [%]
Rozwiązując zadania z ich użyciem Poprzez skojarzenia Inna odpowiedź: dokładne ich zrozumienie	16 9 1	70 39 4
Czy masz problem z zapamiętywaniem różnych informacji z matematyki? Tak Nie To zależy od działu	 5 1 17	 22 4 74
Czy uczenie się matematyki przez czytanie i powtarzanie jest Twoim zdaniem skuteczne? Tak Nie	 10 13	 43 57
Czy lubisz uczyć się matematyki poprzez gry i zabawy dydaktyczne? Tak Nie	 22 1	 96 4
Czy znane Ci są techniki szybkiego uczenia się (tzw. mnemotechniki – sposoby ułatwiające uczenie się tj. wierszyki, rymowanki, skojarzenia)? Tak Nie	 20 3	 87 13

Pytanie 2 umożliwiało wybór kilku odpowiedzi i studenci korzystali z tej możliwości. Najczęściej wskazywaną metodą uczenia się definicji i praw matematycznych było rozwiązywanie zadań z ich użyciem (70% badanych). Studenci podawali także, że uczą się na pamięć (57%) oraz przez skojarzenia (39%), co może sugerować stosowanie mnemotechnik. To, że uczą się, stosując fiszki, wskazało 5 osób.

Tylko jedna osoba stwierdziła, że nie ma problemu z zapamiętywaniem różnych informacji. Większość studentów (74%) podała, że trudności pojawiają się w niektórych działach matematyki, natomiast pozostali (22%) deklarują, że mają trudności z zapamiętywaniem. Zdania badanych na temat uczenia się matematyki przez czytanie i powtarzanie są podzielone: 43% respondentów uważa, że jest ono skuteczne, zaś 57% ma przeciwne zdanie. Zdecydowana większość studentów lubi się uczyć matematyki przez gry i zabawy dydaktyczne (96%), jak również większość badanych (87%) deklaruje, że zna mnemotechniki.

Pytania 7, 8 i 9 są następujące:
- Jakie znasz wierszyki, rymowanki pomagające zapamiętać informacje matematyczne (wypisz wszystkie)?,
- Jakie znasz mnemotechniki związane z matematyką polegające na skojarzeniach (wymień i opisz je)?,
- Jakie znasz inne triki, metody szybkiego uczenia się, wymień i opisz je (spróbuj wypisać wszystkie jakie znasz)?

Pytania 7, 8 i 9 są pytaniami otwartymi, w których ankietowani mogli wymieniać wiele przykładów. Studenci zostali poproszeni o wypisanie znanych im mnemotechnik z podziałem na techniki oparte na rymie, na skojarzeniach i inne techniki. W odpowiedziach studentów, poza wskazanymi mnemotechnikami, pojawiały się także przykłady, które były błędnie przypisane do danej grupy mnemotechnik lub nie były mnemotechnikami.

Studenci wymieniali następujące rymowanki związane z nauczaniem matematyki:
- wierszyk o znakach funkcji trygonometrycznych w ćwiartkach układu współrzędnych (14 osób),
- wierszyk o niedzieleniu przez zero (3 osoby),
- wierszyki dotyczące tabliczki mnożenia (5 osób),
- wierszyk o sumie kątów w trójkącie (1 osoba),
- wierszyk o liczbie *pi* (1 osoba),
- werset o dzieleniu ułamków zwykłych („kropka znika, a ułamek fika") (1 osoba),
- wiersz o liczeniu od 1 do 10 (1 osoba).

Wypisując mnemotechniki oparte na skojarzeniach, badani podali:
- akrostychy dotyczące cyfr rzymskich L, C, D, M (4 osoby),
- *pi-ematy* (4 osoby),
- rymy (3 osoby),
- zakładki liczbowe – metoda haków (2 osoby),
- porównanie zadania do sytuacji z życia codziennego (3 osoby),
- trójkąt svt (1 osoba),
- deltoid jako latawiec (1 osoba),
- romb jako spłaszczony kwadrat (1 osoba),
- oś odciętych, bo X przypomina nożyczki (3 osoby),
- odcinki są równoległe, gdy „równo stoją" (1 osoba),
- funkcja wypukła jako stojący kieliszek, a funkcja wklęsła jako odwrócony kieliszek (1 osoba),
- funkcja wyp**U**kła (1 osoba),
- tworzenie tabeli wartości funkcji trygonometrycznych podstawowych kątów (1 osoba).

Odpowiedzi studentów pokazują, że jako inne metody szybkiego ucznia się postrzegają oni:

- fiszki (6 osób),
- mapy myśli (5 osób),
- układanie historyjek (3 osoby),
- rysowanie skojarzeń (7 osób),
- powtarzanie (2 osoby),
- tabliczka mnożenia na palcach (2 osoby).

W udzielonych odpowiedziach pomieszane zostały rodzaje mnemotechnik z poszczególnymi ich przykładami oraz pojawiały się sposoby uczenia, które nie są mnemotechnikami, np. rozwiązywanie zadań, podkreślenia, mówienie na głos, tłumaczenie innym. Studenci podawali jedną lub kilka przykładów z danej kategorii, lecz były także braki odpowiedzi (3 razy w pytaniu 7, 5 razy w pytaniu 8 i raz w pytaniu 9). Zliczając wszystkie wskazania, które dotyczyły mnemotechnik, można stwierdzić, że studenci podali średnio trochę ponad trzy techniki. Ankietowani przyszli nauczyciele podawali różnorodne przykłady mnemotechnik stosowanych w uczeniu matematyki.

Tabela 11. Odpowiedzi studentów na pytania 10–15

Pytania dla studentów	Odpowiedzi studentów	Odpowiedzi studentów w [%]
Czy ucząc innych matematyki (praktyki, korepetycje, pomoc koleżeńska), używasz mnemotechnik?		
Tak, kiedy tylko mogę	6	26
Tak, przy niektórych tematach	14	61
Nie	3	13
Czy uważasz mnemotechniki za pomocne przy nauczaniu matematyki?		
Tak	21	91
Nie	0	0
Nie wiem	2	9
Czy ucząc innych zauważasz lepsze wyniki po zastosowaniu mnemotechnik?		
Tak	5	22
Nie	0	0
To zależy od ucznia	10	43
To zależy od treści nauczania	5	22
Nie wiem	3	13

cd. tab. 11

Pytania dla studentów	Odpowiedzi studentów	Odpowiedzi studentów w [%]
Czy zauważasz większe zainteresowanie uczniów przy stosowaniu mnemotechnik?		
Tak	12	52
Nie	0	0
To zależy od ucznia	8	35
Nie wiem	3	13
Czy chciałbyś poznać więcej mnemotechnik?		
Tak	21	91
Nie	0	0
Nie wiem	2	9
Czy uważasz, że mnemotechniki powinny być stosowane w nauczaniu matematyki?		
Tak	23	100
Nie	0	0

Większość studentów (87%) stosuje mnemotechniki, ucząc innych, przy czym 26% badanych robi to, kiedy tylko może, a 61% przy niektórych tematach. Zdecydowana większość studentów (91%) uważa mnemotechniki za pomocne przy nauczaniu matematyki, zaś 9% nie ma na ten temat zdania. Studenci zauważają poprawę wyników uczniów po zastosowaniu mnemotechnik (22% badanych), przy czym wielu uważa, że jest to uzależnione od ucznia (43%) lub od treści nauczania (22%). Połowa przyszłych nauczycieli (52%) zauważa większe zainteresowanie uczniów przy stosowaniu technik zapamiętywania, 35% badanych stwierdza, że to zależy od ucznia, zaś 13% studentów nie ma zdania na ten temat. Zdecydowana większość ankietowanych studentów (91%) chciałaby poznać więcej mnemotechnik, natomiast wszyscy stwierdzili, że powinny być one stosowane w nauczaniu matematyki.

Badani zostali poproszeni o uzasadnienie swego zdania w następnym pytaniu (Dlaczego uważasz, że mnemotechniki powinny/ nie powinny być stosowane w nauczaniu matematyki?) w formie odpowiedzi pisemnej. Jedna osoba mogła wskazać kilka argumentów. Oto jedna z wypowiedzi „Powinny być stosowane – rozwijają wyobraźnię, działają dobrze na kreatywność ucznia, stosowanie ich skraca czas nauki, nauka jest przyjemniejsza". Uzasadniając swoje odpowiedzi, przyszli nauczyciele podawali następujące argumenty:

- mnemotechniki pomagają zapamiętać informacje (9 osób),
- mnemotechniki ułatwiają naukę (9 osób),

- mnemotechniki zachęcają do nauki, gdyż wzbudzają zainteresowanie uczniów (9 osób),
- nauka z użyciem mnemotechnik, które często są humorystyczne, jest przyjemna (7 osób),
- mnemotechniki rozwijają wyobraźnię (2 osoby),
- mnemotechniki rozwijają kreatywność (1 osoba),
- mnemotechniki skracają czas nauki (1 osoba).

W wypowiedziach studentów, poza wskazaniem licznych zalet wykorzystywania mnemotechnik w nauczaniu matematyki, została umieszczona jedna uwaga dotycząca zagrożenia związanego z tą techniką, mianowicie „Potrafią ułatwić zapamiętanie pewnych zagadnień, które są wyłącznie nauką na pamięć. Mogą jednak negatywnie wpłynąć, kiedy są wykorzystywane do upraszczania bardziej skomplikowanych zagadnień". Ta wypowiedź wskazuje na to, że student ma świadomość, że mnemotechniki mogą być stosowane jako narzędzie do zapamiętania informacji, jednak nie można tylko na tym poprzestać. Należy zadbać również o to, aby dana informacja (zagadnienie) została także zrozumiana przez ucznia.

Podsumowując odpowiedzi, można stwierdzić, że większość przyszłych nauczycieli zna mnemotechniki, w szczególności zna przykłady wykorzystywane w nauczaniu matematyki. Studenci znają różnorodne techniki pamięciowe, przy czym nie podają zbyt wielu przykładów (średnio po 3). Badani chętnie wykorzystują mnemotechniki w nauczaniu innych i uważają je za pomocne, jednak zauważają, że ich wpływ na wyniki bądź zainteresowanie uczniów może być uzależnione od treści nauczania lub predyspozycji uczniów. Studenci zgodnie uważają, że mnemotechniki powinny być stosowane w nauczaniu matematyki, co argumentują tym, że techniki te pomagają zapamiętać informacje, ułatwiają naukę oraz wzbudzają zainteresowanie uczniów.

PODSUMOWANIE

Z ankiet wynika, że większość studentów i nauczycieli zna pojęcie mnemotechnika i jej przykłady, natomiast około połowa uczniów nie zna tego terminu i nie podaje przykładów. Odpowiedzi uczniów i studentów dotyczące sposobów uczenia się matematyki są dość zbliżone. Około połowa tych badanych uważa za skuteczne uczenie się matematyki przez czytanie i powtarzanie, dodatkowo część z nich deklaruje, że uczy się na pamięć. Pojawiają się jednak odpowiedzi sugerujące stosowanie mnemotechnik (skojarzenia, fiszki), ale nie jest to zbyt popularne podejście. Zarówno uczniowie, jak i studenci deklarują, że ucząc się matematyki, mają problemy z zapamiętaniem informacji, lecz 70% tych badanych podaje, że jest to uzależnione od treści nauczania. W rozwiązaniu tych trudności pomocne mogą być mnemotechniki, także te wykorzystywane w grach dydaktycznych.

Odpowiedzi studentów i nauczycieli dotyczące uczenia innych są podobne. Badani zgodnie uważają mnemotechniki za pomocne przy nauczaniu i uważają, że powinny być stosowane. Ankietowani uważają, że efektywność stosowania technik pamięciowych jest zależna od treści nauczania i klasy, w której przeprowadzane są zajęcia.

Tabela 12. Odpowiedzi badanych na pytania zamknięte

Pytania	Odpowiedzi uczniów	Odpowiedzi nauczycieli	Odpowiedzi studentów
Czy lubisz matematykę?			
Tak	28		
Nie	18	–	–
Niektóre działy lubię, innych nie	54		
W jaki sposób uczysz się definicji i praw matematycznych?			
Na pamięć	23	–	57
Poprzez fiszki	2		22
Rozwiązując zadania z ich użyciem	58		70
Poprzez skojarzenia	15		39
Inna odpowiedź: dokładne ich zrozumienie	2		4
Czy masz problem z zapamiętywaniem różnych informacji z matematyki?			
Tak	17	–	22
Nie	14		4
To zależy od działu	69		74
Czy uczenie się matematyki przez czytanie i powtarzanie jest Twoim zdaniem skuteczne?			
Tak	52	–	43
Nie	48		57
Czy lubisz uczyć się matematyki poprzez gry i zabawy dydaktyczne?			
Tak	57	–	96
Nie	43		4
Czy znane Ci są techniki szybkiego uczenia się (tzw. mnemotechniki – sposoby ułatwiające uczenie się, tj. wierszyki, rymowanki, skojarzenia)?			
Tak	46	86	87
Nie	54	14	13

cd. tab. 12

Pytania	Odpowiedzi uczniów	Odpowiedzi nauczycieli	Odpowiedzi studentów
Czy ucząc innych matematyki, używasz mnemotechnik?			
Tak, kiedy tylko mogę		5	26
Tak, przy niektórych tematach	–	86	61
Nie		9	13
Czy uważasz mnemotechniki za pomocne przy nauczaniu matematyki?			
Tak	–	91	91
Nie		9	0
Nie wiem		0	9
Czy ucząc innych, zauważasz lepsze wyniki po zastosowaniu mnemotechnik?			
Tak	–	23	22
Nie		9	0
To zależy od ucznia/klasy		36	43
To zależy od treści nauczania		32	22
Nie wiem		0	13
Czy zauważasz większe zainteresowanie uczniów przy stosowaniu mnemotechnik?			
Tak		32	52
Nie	–	9	0
To zależy od ucznia/klasy		59	35
Nie wiem		0	13
Czy chciałbyś poznać więcej mnemotechnik?			
Tak	60		91
Nie	6	–	0
Nie wiem	34		9
Czy uważasz, że mnemotechniki powinny być stosowane w nauczaniu matematyki?			
Tak	–	95	100
Nie		5	0

Ankiety wykazały, że techniki szybkiego uczenia się są wykorzystywane na lekcjach matematyki w różnym stopniu. Badani wyrażają chęć poznawania mnemotechnik (tabela 12). Uczniowie znają mniej mnemotechnik niż nauczyciele i studenci. Nauczyciele i studenci podawali średnio po 3 przykłady różnych mnemotechnik. Połowa uczniów nie podała mnemotechnik, zaś pozostali uczniowie wskazywali średnio po 3 przykłady, przy czym były to głównie trzy te same przykłady.

Podsumowując, przeprowadzone badanie wykazało, że mnemotechniki są obecne w nauczaniu matematyki i są postrzegane jako pomocne, jednak ich rola w nauczaniu nie jest kluczowa. Stanowią raczej pomocne narzędzie do zapamiętania informacji, zainteresowania tematem i wprowadzenia przyjemnej atmosfery.

Najczęściej stosowane mnemotechniki w nauczaniu matematyki to rymowanki (np. wierszyk o znakach funkcji trygonometrycznych), metoda akrostychów (LCDM) oraz metoda skojarzeń (trójkąt svt), lecz pojawiają się także inne metody, m.in. metoda haków pamięciowych, mamy myśli, układanie historyjek, fiszki. Badani zauważają korzyści płynące z zastosowania mnemotechnik i deklarują chęć ich stosowania, jednak wielu nauczycieli i studentów podaje, że wpływ mnemotechnik na wyniki i zainteresowanie uczniów jest zależny od nastawienia uczniów.

Mnemotechniki mogą być stosowane w nauczaniu matematyki jako narzędzie ułatwiające zapamiętanie informacji. Zastosowanie mnemotechnik powinno być uzależnione od treści nauczania oraz dostosowane do wieku uczniów. Warto podkreślić, że mnemotechniki nie są metodą nauczania, lecz techniką pamięciową.

BIBLIOGRAFIA

Akinsola, M., Odeyemi, E. (2014). Effects of Mnemonic and Prior Knowledge Instructional Strategies on Students Achievement in Mathematics. *International Journal of Education and Research*, *2*(7), 675–688.

Dereń, E. (2005). Mnemotechniki i czytanie fotograficzne a proces uczenia się. *Nauczyciel i szkoła*, *1–2*(26–27), 139–153.

Jolles, J., Jolles, D. (2021). On Neuroeducation: Why and How to Improve Neuroscientific Literacy in Educational Professionals. *Frontiers in Psychology*, *12*, 1–18.

Jurowski, K., Jurowska, A., Krzeczkowska, M. (2015). Preliminary Studies About Knowledge and Applications of Science Mnemonics by Polish Pupils. *Chemistry-Didactics-Ecology-Metrology*, *20*(1–2), 19–30.

Jurowski, K., Jurowska, A., Krzeczkowska M., Własiuk, P. (2014). Mnemonic Methods as a Sophisticated Tool in Learning the Science Subjects from Polish Pupils Point of View. *Edukacja Humanistyczna*, *2*(31), 155–172.

Jurowski, K., Jurowska, A., Krzeczkowska M., Własiuk, P. (2014). Preliminary Studies About Knowledge and Applications of Mnemonic Methods by Polish Pupils, Students and Teachers. W: P. Cieśla i A. Michniewska (red.), *Teaching and learning science at all levels education* (s. 28–36), Kraków: Pedagogical University of Kraków.

Kaczmarzyk, M. (2014). Neurobiologia w edukacji. W: D. Krzyżyk, B. Niesporek-Szamburska (red.), *Pedagogika szkolna* (s. 112–134). Katowice: Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego.

Kalina, P. (1997). *Mnemonika, czyli sztuka kształcenia i wzmacniania pamięci.* Warszawa: TKS.

Małaszkiewicz, M. (red.) (2021). *Mnemotechniki i metody aktywizujące*. Białystok: Białostocka Szkoła Ćwiczeń.

Ni, L., Hassan, N. (2019). The Use of Mnemonic and Mathematical Mnemonic Method in Improving Historical Understanding. *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Educational and Pedagogical Sciences*, *13*(2), 93–97.

Olu-Ajayi, F. E. (2022). The Upshot of Mnemonic on Gender and Other Learning Outcomes of Senior Secondary School Students in Biology. *International Journal of Education, Learning and Development*, *10*(3), 16–25.

EKOMATIK w edukacji wczesnoszkolnej

Henryk Kąkol

emerytowany profesor Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie
henkakol@gmail.com
ORCID: 0009-0001-8176-4779

Kinga Ludorowska

Szkoła Podstawowa nr 2 w Ustroniu
kingarym@poczta.onet.pl
ORCID: 0009-0008-5594-2368

Streszczenie

Artykuł pokazuje pewną koncepcję dydaktyczną realizacji treści matematycznych i informatycznych w klasach I–III SP. Opracowanie dydaktyczne z zakresu nauczania matematyki nawiązuje do koncepcji nauczania matematyki w klasach I–III szkoły podstawowej opracowanej przez E. Gruszczyk-Kolczyńską, a także do propozycji wykorzystania Darów Froebla w edukacji matematycznej w przedszkolu autorstwa E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i J. Kozieł. Wykorzystano także pracę E. Gruszczyk-Kolczyńskiej *Zadania tekstowe*. Opracowanie dydaktyczne z zakresu nauczania elementów kodowania i programowania w klasach I–III szkoły podstawowej oparte jest na pracy Macieja Sysły oraz na unikalnej koncepcji nauczania informatyki opublikowanej w pracy zbiorowej pod red. A. W. Mitasa *System komplementarnego nauczania algorytmiki w aspekcie myślenia komutacyjnego*. Oba opracowania tworzą jedną całość i realizują postulat zintegrowanego nauczania matematyki i elementów programowania. Oparte są one na zestawie EKOMATIK, który składa się z:

- drewnianego pudełka zawierającego specjalne siatki, podkładki, drewniane klocki w różnych kolorach, kostki do gry, wybrane bryły platońskie, modele figur przestrzennych i płaskich, klocki-miarki, linijki do mierzenia;
- zestawu klocków do programowania;
- przewodnika metodycznego zawierającego scenariusze zajęć;
- aplikacji komputerowej oraz zestawu prezentacji komputerowych wspomagających realizację poszczególnych obszarów kształcenia matematycznego i informatycznego.

Zestaw EKOMATIK powstał w ramach programu badawczego „Zestaw innowacyjnych pomocy edukacyjnych dla dzieci przedszkolnych i szkolnych” zrealizowanego w Narodowym Centrum Badań i Rozwoju.

Summary

The article shows a certain didactic concept for the implementation of mathematical and informatics content in grades I–III of primary school. The didactic study in the field of teaching mathematics refers to the concept of teaching mathematics in grades I-III of primary school developed by E. Gruszczyk-Kolczyńska, as well as to the proposal of using Froebel's Gifts in mathematical education in kindergarten by E. Gruszczyk-Kolczyńska and J. Koziel. The work of E. Gruszczyk-Kolczyńska Text tasks was also used. The didactic study in the field of teaching elements of coding and programming in grades 1–3 of primary school is based on the works of Maciej Sysła and the unique concept of teaching computer science published in a collective work edited by A.W. Mitasa - A system of complementary teaching of algorithmics in the aspect of commutation thinking. Both studies form one whole and implement the postulate of integrated teaching of mathematics and elements of programming. They are based on the EKOMATIK set, which consists of:

- a wooden box containing special meshes, pads, wooden blocks in various colors, dice, selected Platonic solids, models of spatial and plane figures, measuring blocks, measuring rulers;
- a set of programming blocks;
- a methodological guide containing lesson plans;
- a computer application and a set of computer presentations supporting the implementation of particular areas of mathematics and IT education.

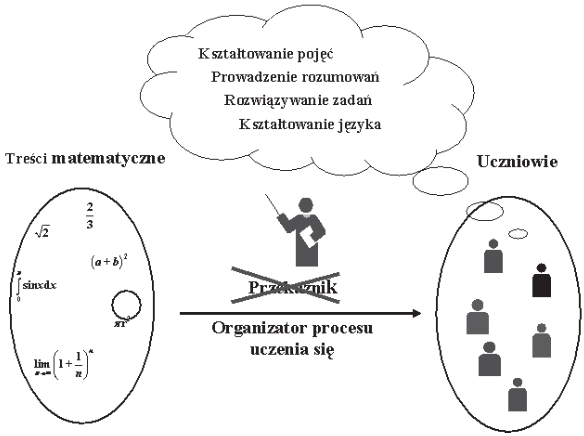
The EKOMATIK set was created as part of the research program "A set of innovative educational aids for preschool and school children" implemented at the National Center for Research and Development.

ROLA ŚRODKÓW DYDAKTYCZNYCH W PROCESIE NAUCZANIA MATEMATYKI

Lekcja matematyki, dawniej jedyna, to obecnie jedna z wielu form zdobywania wiedzy matematycznej przez uczniów. Różnie zapewne wyglądała w kolejnych okresach rozwoju ludzkości, rozwoju jej kultury i techniki. Zawsze jednak była i jest podstawową formą pracy nauczyciela, miejscem przebiegu niezwykle złożonych i subtelnych procesów psychicznych towarzyszących kształtowaniu pojęć, prowadzeniu rozumowań, rozwiązywaniu zadań i kształtowaniu języka matematycznego czy też informatycznego. Poniższy obrazek ilustruje proces nauczania matematyki[1].

Proces nauczania matematyki jest niezwykle złożony i trudny. Z jednej bowiem strony mamy treści matematyczne, specyficzne w swojej postaci, często bardzo abstrakcyjne, statyczne (nieruchome i niezmienne w czasie), na ogół nielubiane przez większość uczniów. Z drugiej strony mamy uczniów, z których

[1] Opracowanie własne.



Rysunek 1

każdy jest niepowtarzalną osobowością patrzącą w sposób indywidualny na świat, na matematykę.

Z trzeciej strony mamy nauczyciela o różnym przygotowaniu merytorycznym, dydaktycznym i dysponującym różnorodnym warsztatem metodycznym (pomoce naukowe, nowoczesne środki dydaktyczne itp.). Stosowane przez niego metody nauczania powinny ulegać ewolucji. Coraz rzadziej należy wykorzystywać metody podające, w których cały wysiłek nauczyciela skoncentrowany jest na przekazywaniu wiedzy, transponowaniu i wtłaczaniu jej w umysły uczących się, natomiast coraz częściej powinno się stwarzać sytuacje, w których nauczyciel jest organizatorem procesu uczenia się matematyki. Tymczasem mimo coraz częstszego stosowania nowoczesnych metod nauczania, wykorzystania środków dydaktycznych coraz bardziej nasyconych technologiami informatycznymi, mimo ukazywania się olbrzymiej liczby publikacji, mimo prowadzenia wielu prób i eksperymentów, osiągane wyniki w nauczaniu wciąż nie są zadowalające. Powszechnie akceptowana jest opinia, że za słabe, czasami wręcz kompromitujące wyniki są odpowiedzialni nauczyciele.

Dydaktycy matematyki zgodnie uważają, że kluczem do poprawy wyników nauczania z matematyki jest zmiana koncepcji nauczania matematyki w nauczaniu wczesnoszkolnym (między innymi rezygnacja z nauczania zintegrowanego na tym poziomie), zatrudnianie na poziomie nauczania wczesnoszkolnego najlepszych nauczycieli matematyki, zmiana stylu nauczania w klasach I–III (zastępowanie metod podających metodami problemowymi). Nauczanie problemowe (Krygowska, 1977) polega na stworzeniu takich warunków psychospołecznych w klasie, aby uczniowie dążyli wspólnie z nauczycielem do rozwiązania problemu, znajdując zadowolenie w pokonywaniu trudności. Jego istotą jest to, że każdy fragment zdobywanej przez uczniów wiedzy jest rozwiązaniem lub częścią rozwiązania postawionego problemu. Nauczanie problemowe można zilustrować następującym schematem (Kąkol, 1991):

POWSTAJĄCA W SPOSÓB NATURALNY

PODANA PRZEZ NAUCZYCIELA

SYTUACJA PROBLEMOWA

UCZNIOWIE FORMUŁUJĄ

NAUCZYCIEL PODAJE

PROBLEM

ROZWIĄZYWANIE PROBLEMU
(stosownie reguł heurystycznych)

SPRAWDZANIE I WERYFIKACJA ROZWIĄZANIA

Zestaw EKOMATIK jest w założeniach autorów takim rozwiązaniem, które niejako zmusza nauczycieli do zmiany stylu nauczania, a w szczególności do stosowania nauczania problemowego. Łatwo za jego pomocą stwarzać sytuacje problemowe, stawiać pytania, formułować problemy, a potem, dzięki indywidualnej pracy uczniów (każde dziecko ma swój własny zestaw klocków), znaleźć rozwiązanie, odpowiedzieć na sformułowane pytanie.

Opracowanie dydaktyczne zestawu EKOMATIK z zakresu matematyki nawiązuje do koncepcji nauczania matematyki w klasach I–III szkoły podstawowej opracowanej przez Edytę Gruszczyk-Kolczyńską (Gruszczyk-Kolczyńska, 2014; Gruszczyk-Kolczyńska, Skura, 2006), a także do propozycji wykorzystania Darów Froebla w edukacji matematycznej w przedszkolu autorstwa E. Gruszczyk-Kolczyńskiej i J. Kozieł (2017). Wykorzystano także pracę E. Gruszczyk-Kolczyńskiej *Zadania tekstowe* (w druku). Przedstawiony zestaw może służyć do realizacji następujących obszarów kształcenia w nauczaniu matematyki w klasach I–III SP (https://podstawaprogramowa.pl…):

- orientacji na płaszczyźnie,
- liczenia,
- działania na liczbach,
- zadań z treścią,

- mierzenia długości,
- geometrii,
- stosowania matematyki.

Opracowanie dydaktyczne zestawu EKOMATIK z zakresu nauczania informatyki w klasach I–III szkoły podstawowej oparte jest na pracy Macieja Sysły (Sysło, 2018; Sysło, Kwiatkowska, 2015) oraz na unikalnej koncepcji nauczania informatyki opublikowanej w pracy zbiorowej pod red. A. W. Mitasa (2016) *System komplementarnego nauczania algorytmiki w aspekcie myślenia komutacyjnego*. Przedstawiony zestaw może służyć do realizacji następujących obszarów kształcenia w nauczaniu informatyki w klasach I–III SP (https://podstawaprogramowa.pl…):

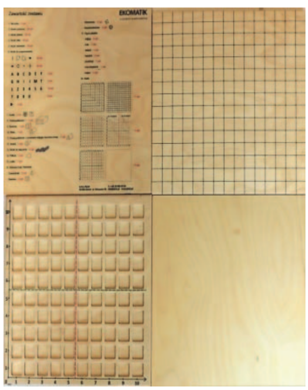
- kodowania,
- programowania prostego,
- programowania z pętlą,
- programowania z obrotem
- programowania w zagadkach.

Składowe zestawu EKOMATIK

Zestaw EKOMATIK do edukacji w zakresie matematyki i informatyki w klasie I–III SP składa się z:

- drewnianego pudełka zawierającego specjalne siatki, podkładki, drewniane klocki w różnych kolorach, kostki do gry, wybrane bryły platońskie, modele figur przestrzennych i płaskich, klocki-miarki, linijkę do mierzenia (fotografia 1a, fotografia 1b, fotografia 1c);

Fotografia 1a



Fotografia 1b

Fotografia 1c

- zestawu klocków do programowani (fotografia 2);

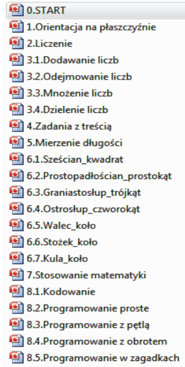
Fotografia 2

- przewodnika metodycznego zawierającego scenariusze zajęć (łącznie 150 scenariuszy realizujących 21 obszarów tematycznych) (fotografia 3);

Fotografia 3

- aplikacji komputerowej zawierającej elektroniczną wersję przewodnika ze scenariuszami, przewodnik metodyczny w formacie pdf, zestaw prezentacji multimedialnych do poszczególnych obszarów kształcenia matematycznego i informatycznego w klasach I–III SP oraz testów kompetencji. Aplikacja komputerowa będzie dostępna na stronie www.ekomatik.edu.pl (fotografia 4a, fotografia 4b).

Fotografia 4a



Fotografia 4b

Zawartość pudełka

Zasadniczą składową EKOMATIK jest zasuwane drewniane pudełko. W środku znajdują się specjalne siatki i podkładki, na których uczniowie układają z klocków różnorodne figury wymagane przy realizacji określonych tematów zajęć. Pudełko wypełnione jest sześciennymi kostkami w różnych kolorach: żółtym, czerwonym, niebieskim i zielonym. Jest ich w każdym kolorze kilkadziesiąt. Na czerwonych, zielonych i żółtych klockach nadrukowane są liczby występujące w tabliczce mnożenia. Oprócz tych kostek znajdują się jeszcze niekolorowe kostki z cyframi od 0 do 9, znakami działań i nierówności, kostki sześcienne do gier, wybrane bryły platońskie oraz modele wybranych figur przestrzennych i płaskich. W osobnym woreczku znajdują się klocki służące do nauki programowania. Po każdym ćwiczeniu uczniowie powinni ułożyć w pudełku klocki tak, jak były ułożone przed rozpoczęciem ćwiczenia. Bardzo przydatne w tym może być zamieszczone na spodzie pudełka zdjęcie obrazujące zawartość i układ początkowy klocków.

Przewodnik metodyczny

Dołączony do zestawu klocków przewodnik metodyczny zawiera scenariusze lekcji w klasach I–III. Są one z jednej strony pewną propozycją dydaktyczną realizacji określonych tematów, z drugiej strony pozwalają nauczycielowi na tworzenie własnych scenariuszy dostosowanych do specyfiki i uzdolnień zespołu klasowego.

Obok każdego scenariusza, nazywanego w przewodniku *ćwiczenie*, znajduje się sugestia, zgodnie z którą w klasach od I do III to ćwiczenie powinno być realizowane. Jest to oczywiście tylko propozycja ze strony autorów przewodnika. Decyzja należy w każdym z przypadków do nauczyciela. Podobnie autorzy oznaczają symbolem (*) ćwiczenia zawierające zadania trudniejsze, a symbolem (**) – ćwiczenia, w których występują zadania wykraczające poza treści przewidziane podstawą programową.

Podstawa programowa dla edukacji wczesnoszkolnej przewiduje naukę elementów informatyki na tym poziomie nauczania. Ćwiczenia z zakresu matematyki, w których występuje problematyka kodowania, są oznaczone w przewodniku symbolem (K).

Zadania z obszaru *Programowanie* są skonstruowane w taki sposób, że pozwalają z jednej strony nabyć wiedzę dającą podstawy do późniejszej nauki programowania, z drugiej strony są platformą, na której realizujemy bardzo ważny aspekt procesu nauczania – integrowania matematyki z informatyką. Formułowane w ćwiczeniach zadania w dużej mierze są zadaniami problemowymi, a zamieszczony przebieg zajęć pokazuje drogę dojścia do rozwiązania problemu.

Występujące często w scenariuszach słowo: *Dlaczego?* zmusza uczniów do szukania i uzasadnienia swojego rozwiązania, nieważne, czy prawdziwego, czy też fałszywego. Uczeń rozumuje i próbuje uzasadniać swoje hipotezy najpierw na drodze rozumowania empirycznego, a potem intuicyjnego lub też w dalszych latach nauki na poziomie formalnym.

Aplikacja komputerowa i prezentacje komputerowe

Na stronie internetowej www.ekomatik.edu.pl znajduje się aplikacja komputerowa, która zawiera elektroniczną wersję przewodnika ze scenariuszami. Można za jej pomocą prowadzić w klasie lekcje matematyki i informatyki z zakresu obszarów wymienionych w poradniku. Do każdego z proponowanych w poradniku ćwiczeń można, za pomocą specjalnie wbudowanego generatora, tworzyć praktycznie nieskończoną liczbę podobnych zadań do tych, które są rozwiązywane na lekcji. Aplikacja zawiera także przewodnik w wersji pdf, który można pobrać i wydrukować. Można także pobrać i zapisać na swoim komputerze prezentacje komputerowe odpowiadające realizowanym obszarom tematycznym oraz prezentację sterującą 0.Start. Jej uruchomienie pozwala poruszać się swobodnie po wszystkich załączonych prezentacjach. Uruchomienie każdej z nich odbywa się po naciśnięciu nazwy tej prezentacji. Przejście z każdej prezentacji do menu głównego po naciśnięciu czerwonej strzałki. Wyjście z prezentacji w dowolnym momencie odbywa się przez naciskanie przycisku *esc*, znajdującego się na klawiaturze komputera. Zarówno przewodnik, jak i prezentacje multimedialne w postaci *Pokazu programu PowerPoint* można pobrać ze strony internetowej, zapisać lokalnie i prowadzić lekcje z ich wykorzystaniem. Przejście między kolejnymi slajdami używanej w danym momencie prezentacji odbywa się za pomocą strzałki znajdującej się na klawiaturze komputera. Każda z prezentacji komputerowych pozwala nauczycielowi w dynamiczny sposób ilustrować wydawane polecenia, pokazywać przykładowe rozwiązania, a także drogę dojścia do wyniku końcowego rozwiązywanego w danym momencie problemu.

PRZYKŁADY WYKORZYSTANIA ZESTAWU EKOMATIK

Zestaw ten może być wykorzystany w następujący sposób w realizacji kształcenia matematycznego i informatycznego w klasach I–III SP:

- każdy uczeń ma do dyspozycji jedno pudełko z klockami oraz zestaw klocków do programowania;
- nauczyciel ma do dyspozycji aplikację komputerową zawierającą elektroniczną wersję przewodnika ze scenariuszami albo przewodnik metodyczny i prezentacje multimedialne;
- w trakcie lekcji nauczyciel wykorzystuje rzutnik z ekranem.

Lekcje obywają się według następującego schematu: nauczyciel wydaje uczniom polecenia i zadaje pytania. Wszystkie polecenia skierowane do nich nauczyciel demonstruje na ekranie odpowiednimi slajdami. Uczniowie szukają odpowiedzi na zadane im pytania, wykorzystując wyjęte z pudełka odpowiednie siatki i klocki. Każdy uczeń pracuje indywidualnie, a po wykonaniu poszczególnych poleceń, nauczyciel dyskutuje z nimi o rezultatach ich pracy i pokazuje na ekranie prawidłowe rozwiązanie rozważanego problemu.

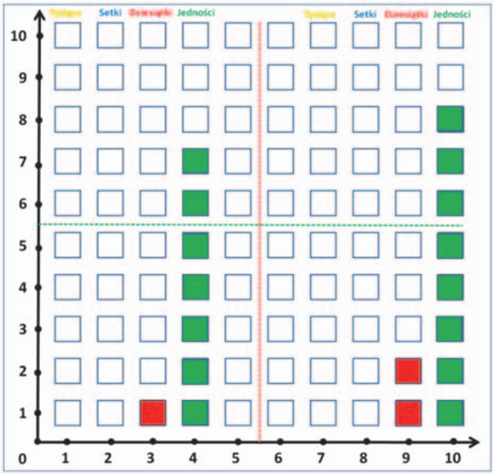
Za pomocą tego zestawu można zrealizować prawie cały materiał z matematyki oraz część materiału z informatyki przewidzianych do realizacji w podstawie programowej (https://podstawaprogramowa.pl…). Poniżej przykładowe ćwiczenia wraz z załączonymi scenariuszami zajęć.

Ćwiczenie 5 z obszaru *Dodawanie liczb.*

Nauczyciel za pomocą rzutnika wyświetla na ekranie rysunek siatki, prosi uczniów, aby wyjęli z pudełka takie same siatki i wydaje polecenie:

Ułóżcie na lewo od czerwonego szlaczka liczbę 17, a na prawo od czerwonego szlaczka liczbę 28.

Uczniowie pracują samodzielnie, a po zakończeniu pracy nauczyciel wyświetla na ekranie poprawny wynik. Dzieci sprawdzają swoje wyniki.



Teraz nauczyciel wydaje uczniom polecenie:

Dodajcie do liczby 17 liczbę 28 i wynik zapiszcie w zeszytach.

Uczniowie pracują samodzielnie. Po wykonaniu polecenia nauczyciel sprawdza zapisane wyniki, a w razie potrzeby wyświetla na ekranie sposób dodawania oraz poprawny wynik. W zeszytach dzieci powinny zapisać wynik dodawania w taki sposób: 17 + 28 = 45.

Uwaga!

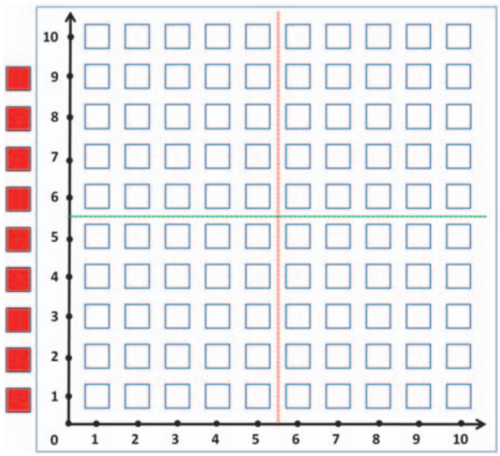
Wykorzystywana na lekcji aplikacja komputerowa pozwala wygenerować dowolnie dużo podobnych zadań, które mogą być rozwiązywane według opisanego wyżej scenariusza. Generowanie takich zadań i ich rozwiązywanie konieczne jest w przypadku, gdy znajdą się w klasie uczniowie, którzy mają problemy z zamianą 10 jedności na 1 dziesiątkę, czyli z tzw. „przekraczaniem progu dziesiątkowego". Warto zwrócić uwagę, że po wykonaniu przez uczniów kilku podobnych ćwiczeń, w ich zeszytach pojawią się przysłowiowe „słupki", będące matematyzacją wykonywanych przez nich czynności, a nie wypełnianiem zamieszczanych w „słupkach" okienek.

Proponowany w przewodniku metodycznym zestaw ćwiczeń matematycznych zawiera wiele zadań, które nie mieszczą się tematycznie w podstawie programowej. Ćwiczenia te oznaczone są w przewodniku symbolem (**). Przykładem jest ćwiczenie, w którym kształtujemy umiejętność dzielenia, a przy dzieleniu pojawia się reszta. Poniżej proponowany przebieg zajęć z obszaru *Dzielenie liczb*.

Ćwiczenie 7** z obszaru *Dzielenie liczb*

Nauczyciel za pomocą rzutnika wyświetla na ekranie rysunek siatki, prosi uczniów, aby wyjęli z pudełka taką samą siatkę jak pokazana na obrazku na ekranie. Następnie wydaje polecenie:

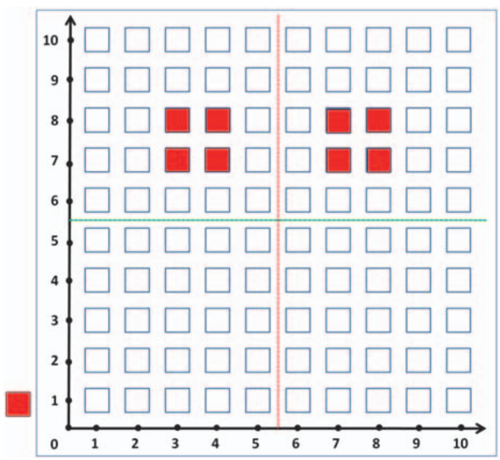
Wyjmijcie z pudełka 9 czerwonych klocków i połóżcie je obok siatki tak, aby cyfry na klockach nie były widoczne.



Po wykonaniu przez uczniów polecenia nauczyciel wydaje kolejne:

Rozłóżcie te klocki po równo w dwóch kwadratach.

Po nieudanej próbie wykonania przez uczniów zadania nauczyciel ilustruje na ekranie układanie klocków w 2 kwadratach i otrzymany wynik, a potem prowadzi z dziećmi rozmowę na temat rozwiązania tego zadania. Wprowadza też nazwę „dzielenia z resztą".



Następnie zapisuje na tablicy wykonywane czynności:

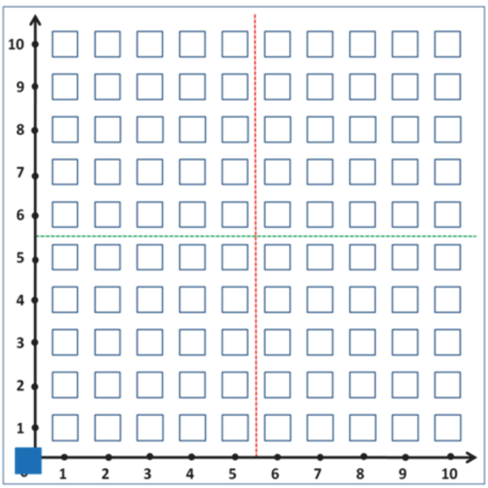
$$9 : 2 = 4 \text{ i } r = 1.$$

Uwaga!

Mamy tu przypadek dzielenia z resztą. Podstawa programowa nie obliguje nauczyciela do wprowadzenia tego pojęcia na tym etapie kształcenia matematycznego. Wykorzystywana na lekcji aplikacja komputerowa pozwala wygenerować dowolnie dużo podobnych zadań, które mogą być rozwiązywane według opisanego wyżej scenariusza. Podstawa programowa z matematyki dla edukacji wczesnoszkolnej nie przewiduje nauki kodowania i programowania na tym poziomie nauczania. Mimo to zestaw klocków EKOMATIK pozwala wprowadzać do nauczania matematyki elementy tych pojęć. Realizuje się w ten sposób ważne w nauczaniu hasło integrowania matematyki z informatyką. Ćwiczenia, w których mamy do czynienia z tym problemem, oznaczone są w przewodniku symbolem (K). Poniżej przykładowy przebieg takich zajęć.

Ćwiczenie 9 K z obszaru *Orientacja na płaszczyźnie*

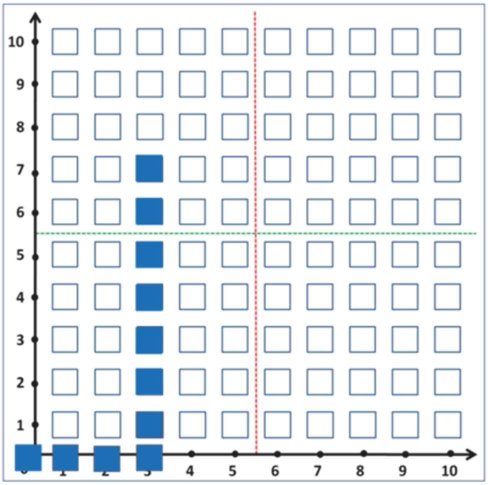
Nauczyciel prosi uczniów, aby wyjęli z pudełka taką samą siatkę, jaka pokazana jest na obrazku na ekranie, a także jeden niebieski klocek i położyli go tam, gdzie zaczynają się strzałki. Po wykonaniu polecenia przez dzieci nauczyciel wyświetla na ekranie poprawne rozwiązanie. Uczniowie sprawdzają wynik swojej pracy.



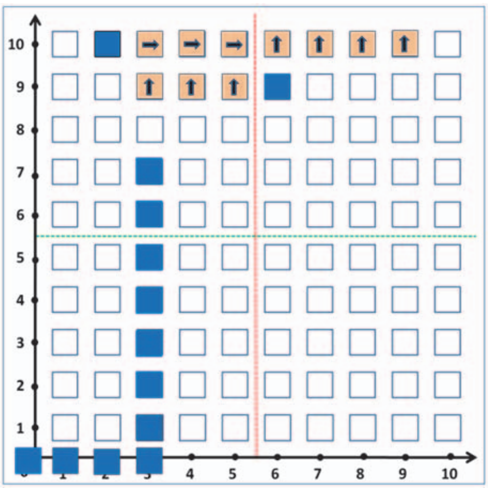
Następnie wydaje polecenie:

Przesuńcie teraz klocek w prawo od pionowej strzałki o 3 kroki i 7 kroków w górę od poziomej strzałki.

Po wykonaniu przez uczniów polecenia nauczyciel pokazuje na ekranie drogę, po której powinien poruszać się klocek. Dzieci sprawdzają swoje prace.



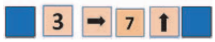
Teraz nauczyciel prosi uczniów o „zapisanie" na siatce za pomocą odpowiednich klocków drogi, po której poruszał się niebieski klocek. Dzieci pracują samodzielnie, a po wykonaniu pracy nauczyciel ilustruje poprawny zapis.



Uwaga!

Warto zwrócić uwagę na to, że już na tym etapie nauczania matematyki pojawiły się pojęcia układu współrzędnych i współrzędnych punktu (nienazywane po imieniu), pojęcia tak bardzo ważne w matematyce. Zestaw EKOMATIK zawiera taki zestaw klocków, który umożliwi zapisanie za jego pomocą wykonywane czynności przy wyznaczaniu współrzędnych punktu. Taki układ klocków jest *de facto* pewnym typem programu komputerowego. W naszym przypadku opisuje drogę, jaką przebył nasz klocek położony w początku układu współrzędnych. Drogę tę można przedstawić w następujący sposób:

lub:



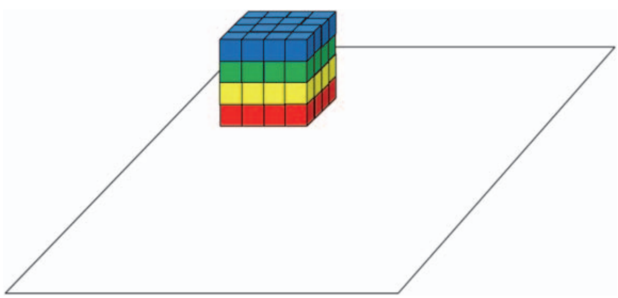
Bardziej zaawansowane przykłady kodowania i programowania znajdują się w części zatytułowanej w przewodniku *Programowanie*.

Przedstawione w obszarze *Geometria* scenariusze zajęć mają na celu kształtowanie u uczniów intuicji figur geometrycznych, przy czym w innym ujęciu niż obowiązujące w polskiej szkole. W szkole bowiem zaczynamy od planimetrii, gdzie staramy się najpierw kształtować pojęcia figur geometrycznych, takich jak: płaszczyzna, prosta, punkt (tzw. pojęcia pierwotne), różne wielokąty, okrąg i koło. Dopiero w starszych klasach szkoły podstawowej zajmujemy się figurami w przestrzeni trójwymiarowej. Poznajemy sześciany, prostopadłościany, graniastosłupy proste, walce, stożki i kule. Takie ujęcie jest sprzeczne z tym, że od narodzin żyjemy w świecie trójwymiarowym, gdzie spotykamy najpierw modele figur przestrzennych, poznajemy ich własności, a dopiero w szkole „zniżamy" się do poziomu dwuwymiarowej płaszczyzny.

W proponowanej w tych scenariuszach koncepcji równolegle kształtujemy pojęcia figur przestrzennych i figur płaskich, przy czym zawsze jako pierwsza pojawia się figura przestrzenna, a potem dopiero figura na płaszczyźnie. Można powiedzieć, że wprowadzamy uczniów w świat geometrii, zaczynając od geometrii brył. Poniżej przykładowy scenariusz zajęć z obszaru *Geometria*.

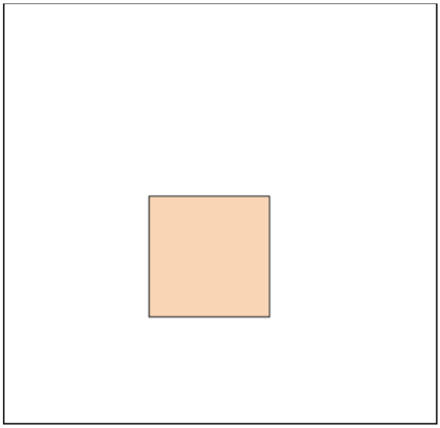
Ćwiczenie ***2*** *z obszaru Sześcian – kwadrat*

Nauczyciel za pomocą rzutnika wyświetla na ekranie rysunek podkładki, prosi uczniów, aby wyjęli z pudełka taką samą drewnianą podkładkę i ułożyli na niej w lewym górnym rogu taki sześcian, jaki jest pokazany na obrazku na ekranie.



Po wykonaniu zadania nauczyciel wydaje uczniom kolejne polecenie:

Wyszukajcie w pudełku figurę, która ma kształt podobny do ściany sześcianu i połóżcie ją na podkładce.



Następnie nauczyciel pyta uczniów:

Czy ktoś wie, jak nazywa się taka figura?

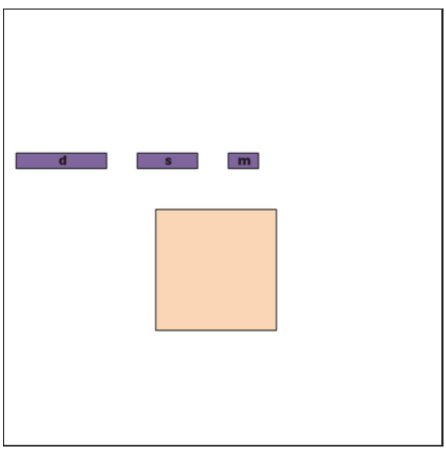
Po udzieleniu przez uczniów poprawnej odpowiedzi, nauczyciel wydaje im kolejne polecenia i zadaje pytanie:

Pokażcie boki kwadratu.

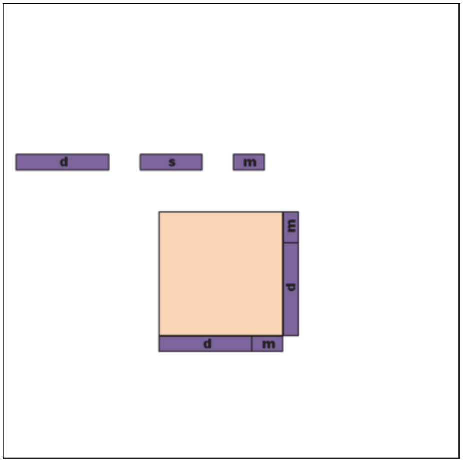
Pokażcie wierzchołki kwadratu.

Ile wierzchołków ma kwadrat?

Wyjmijcie z pudełka fioletowe klocki i zmierzcie nimi długość wszystkich boków kwadratu.



Uczniowie po udzieleniu poprawnych odpowiedzi wymierzają boki kwadratu fioletowymi klockami. W razie kłopotów z wymierzaniem nauczyciel demonstruje poprawne czynności za pomocą slajdu na obrazku na ekranie.



Następnie zadaje kolejne pytania i wydaje polecenie:

Co ciekawego możecie powiedzieć o długościach boków kwadratu?

Czy wszystkie boki kwadratu mają taką samą długość?

Uczniowie powinni odpowiedzieć, że wszystkie boki kwadratu mają długości równe jednemu klockowi dużemu i jednemu małemu, czyli długości boków kwadratu są równe.

Po udzieleniu odpowiedzi nauczyciel wydaje kolejne polecenie:

Obliczcie obwód kwadratu (obwód to łączna długość wszystkich boków kwadratu). Sposób obliczania obwodu zapiszcie w zeszytach.

Uczniowie powinni zapisać swoje obliczenia tak:

Obwód kwadratu = 1 d + 1 m + 1 d + 1 m + 1 d + 1 m + 1 d + 1 m.

Uwaga!

Uczniowie zdolniejsi powinni ten wynik zapisać tak: Obwód kwadratu = 4 d + + 4 m = 5 d + 1 m.

Wszystkie wykonywane przez uczniów polecenia i udzielane odpowiedzi na postawione pytania służą odkrywaniu podstawowych własności kwadratu, a tym samym kształtowaniu jego pojęcia. Warto też zwrócić uwagę na to, że nie jest tu proponowane używanie słowa „kąt" ani formułowanie własności, że kwadrat ma wszystkie kąty równe i miara każdego równa się 90°. Są to pojęcia i własności dla uczniów w tym wieku bardzo trudne. Nie oznacza to jednak, że nie znajdą się tacy, którzy potrafią rozmawiać o tych problemach.

W klasie, w której są uczniowie o uzdolnieniach matematycznych, można po zbudowaniu przez nich sześcianu zadać im pytania:

Ile klocków widzicie, patrząc na ścianę boczną zbudowanego sześcianu?

Z ilu klocków składa się zbudowany przez was sześcian?

Pytania te dotyczą pojęcia pola i objętości figury, w tym przypadku kwadratu i sześcianu. Proponowane ujęcie jest dla uczniów kolejnym empirycznym zetknięciem się z tymi pojęciami.

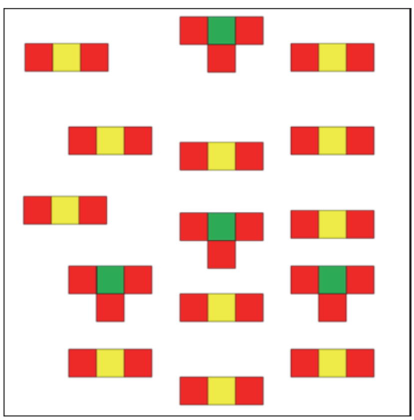
Z badań naukowych (Gruszczyk-Kolczyńska, *Zadania tekstowe*, w druku) wynika między innymi to, że jedną z wielu trudności spotykanych przy rozwiązywaniu zadań z treścią jest to, że uczniowie nie potrafią zapamiętywać treści słyszanego lub przeczytanego zadania. Z tego powodu powinno się organizować zajęcia tak, aby uczniowie mieli okazję powtarzania treści zadania i to czasami kilkakrotnie. Oto przykład takiego ćwiczenia oznaczonego symbolem (*), którym oznaczone są w przewodniku zadania trudniejsze.

Ćwiczenie 5* z obszaru *Zadania z treścią*

Nauczyciel za pomocą rzutnika wyświetla na ekranie rysunek podstawki. Prosi uczniów, aby położyli przed sobą takie same podstawki. Następnie objaśnia, że ta podstawka ilustruje jezioro, po którym mogą pływać łódki, kajaki, żaglówki i rowery wodne, reprezentowane u nas przez klocki. Objaśnia uczniom, że posiadane przez nich żółte klocki będą oznaczać rowery wodne, na których siedzi dwoje ludzi, a zielone klocki będą ilustrować rowery wodne, na których siedzi troje ludzi. Czerwone klocki ilustrują ludzi. Po tym wyjaśnieniu opowiada im historyjkę:

Po jeziorze pływa 11 rowerów wodnych, a na każdym rowerze siedzi dwoje ludzi oraz 4 rowery, na których siedzi po troje ludzi.

Po tym nauczyciel prosi wybranego ucznia, aby powtórzył treść opowiedzianej historyjki. W przypadku problemów pozostałe dzieci pomagają koledze (koleżance). Teraz prosi uczniów, aby położyli na podstawkach odpowiednią liczbę klocków w taki sposób, aby nie było widać cyfr wypisanych na ściankach klocków.



Po wykonaniu przez uczniów polecenia nauczyciel pokazuje na ekranie odpowiedni obrazek. Uczniowie sprawdzają swoje wyniki. Następnie zadaje pytanie:

Ile osób pływa po jeziorze?

Po udzieleniu odpowiedzi prosi uczniów, aby w zeszytach zapisali rozwiązanie tego zadania. Dzieci powinny zapisać swoje rozwiązane w następujący sposób:

$$11 \bullet 2 = 22$$

$$4 \bullet 3 = 12$$

$$22 + 12 = 34$$

lub

$$11 \bullet 2 + 4 \bullet 3 = 34.$$

W razie problemów z obliczaniem podanych w historyjce działań, nauczyciel prosi uczniów o wyjęcie z pudełka siatki z napisami: Jedności, Dziesiątki, Setki i Tysiące i wykonanie tych działań przy wykorzystaniu odpowiednich klocków i znanego już sposobu dodawania na siatce.

Uwaga!

Jest to zadanie, w którym występują dwa działania: dodawanie i mnożenie. Uczniowie powinni dostrzec, że najpierw wykonuje się mnożenie, a potem dodawanie, w razie potrzeby nauczyciel sam o tym musi powiedzieć.

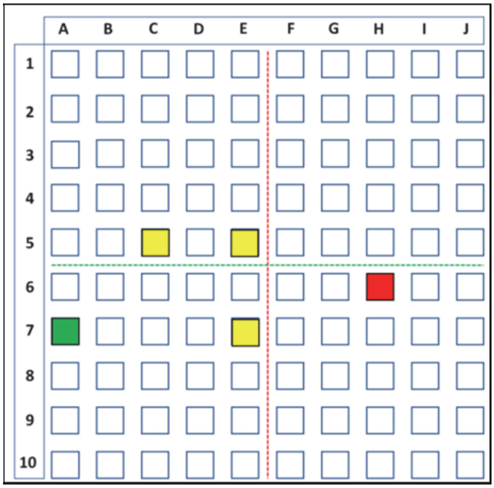
Podstawa programowa dla edukacji wczesnoszkolnej przewiduje naukę elementów informatyki na tym poziomie nauczania. Zadania z obszaru *Programowanie* są skonstruowane w taki sposób, że pozwalają z jednej strony nabyć wiedzę dającą podstawy do późniejszej nauki programowania, z drugiej strony są platformą, na której realizujemy bardzo ważny aspekt procesu nauczania – integrowania matematyki z informatyką. Poniżej przykład takiego scenariusza.

Ćwiczenie 6 z obszaru *Programowanie z obrotem*

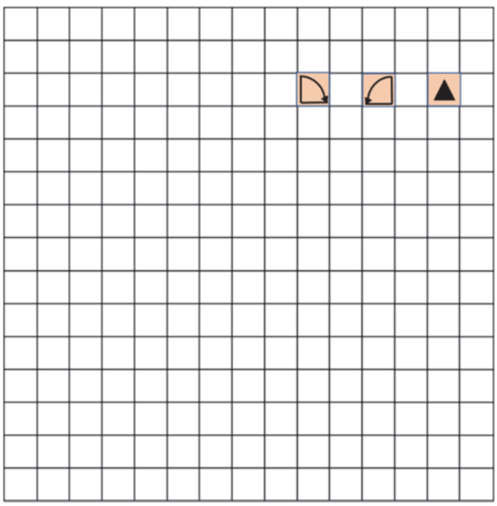
Nauczyciel prosi uczniów, aby wyjęli z pudełka taką samą siatkę, jaka jest pokazana na obrazku na ekranie, i zaczyna opowiadać historyjkę. Uczniowie mają za zadanie ułożyć klocki, według danych, które usłyszą.

Piraci wybrali się na poszukiwanie skarbów (A7). Idąc w głąb wyspy, znaleźli wspaniałą skrzynię pełną złotych dukatów (C5), odkryli zapomnianą wioskę (E5) i drzewo z nieznanymi dotąd owocami (E7). Swoje poszukiwania zakończyli wśród palm, gdzie rozbili obóz (H6).

Uczniowie najpierw powtarzają treść zadania, a potem wymieniają i pokazują na siatkach pole, gdzie piraci zaczęli poszukiwania, pole, gdzie zakończyli wędrówkę oraz pola, przez które przechodzili. Następnie układają odpowiednie klocki na swoich siatkach. Po ułożeniu klocków nauczyciel wyświetla poprawne ich położenie. Dzieci sprawdzają swoje prace.



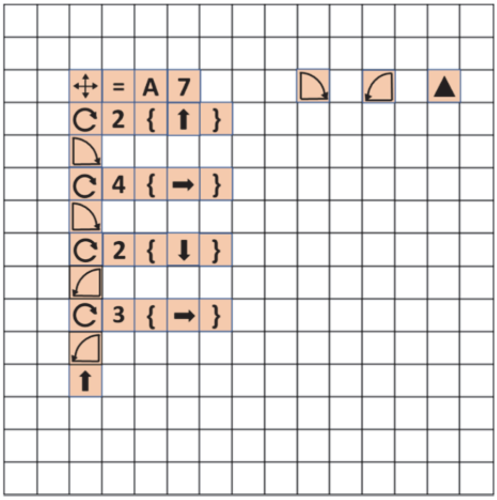
Teraz nauczyciel prosi uczniów, aby wyjęli siatkę służącą do pisania programów i informuje ich, że na tej lekcji poznają nową funkcję, jaką jest obrót: w prawo lub w lewo. Demonstruje na ekranie oraz objaśnia odpowiednie klocki. Przypomina im, że będą używać także najdłuższego klocka, który pomoże nam w śledzeniu drogi od startu do mety i też demonstruje jego wygląd na ekranie.



Po tym mówi:

Wyobraź sobie, że jesteś piratem i odkrywasz z kompanami tajemniczą wyspę. Napiszemy program, który odtworzy twoją wędrówkę.

Teraz nauczyciel wyświetla nowe symbole i objaśnia ich znaczenie, a następnie demonstruje tworzenie programu, wyświetlając na ekranie kolejne jego wiersze.



Po wyświetleniu pierwszego wiersza dzieci sprawdzają na swoich siatkach poprawność zapisu. Nauczyciel prosi o wyciągnięcie najdłuższego klocka ze strzałką i postawienie go na zielonym klocku tak, aby strzałka była skierowana do górnej krawędzi siatki (na północ). Nauczyciel wyświetla drugi wiersz programu, uczniowie przesuwają klocek ze strzałką dwa kroki w górę. Nauczyciel wyświetla trzeci wiersz programu, uczniowie obracają klocek w prawo. Czwarty wiersz programu – uczniowie przesuwają klocek o cztery kroki w prawo. I tak nauczyciel wyświetla kolejne wiersze programu, a uczniowie przesuwają odpowiednio swój klocek, sprawdzając za każdym razem, czy są spełnione warunki podane w historyjce.

EFEKTYWNOŚĆ EKOMATIK-A

Zestaw EKOMATIK jest środkiem dydaktycznym przeznaczonym dla dzieci w wieku wczesnoszkolnym w zakresie wspierania rozwoju kompetencji matematycznych i programistycznych, a także, co jest dużym atutem, kompetencji społecznych. Jest przeznaczony do pracy indywidualnej (jeden zestaw – jeden uczeń), preferuje prowadzenie zajęć metodą problemową, wymusza u nauczyciela niejako zmianę stylu nauczania. Pozwala nie tylko realizować większość haseł z podstawy programowej z matematyki, ale zawiera dużo ćwiczeń wykraczających poza nią. Pozwala realizować hasła z podstawy programowej z informatyki dotyczące elementów kodowania i programowania. Zawiera nie tylko gotowe scenariusze zajęć, ale także daje możliwość samodzielnego ich tworzenia. Znajdująca się w zestawie aplikacja komputerowa pozwala na generowanie praktycznie nieskończonej liczby zadań.

Drewniane klocki tworzą naturalne, proste konstrukcyjnie zabawki, wyśmienicie pobudzające dziecięcą kreatywność, wzmagające ciekawość poznawczą i pozwalające na szybsze przyswajanie matematycznych treści. Pozwala tworzyć innowacyjne koncepcje wprowadzenia wielu pojęć matematycznych i informatycznych. Mogą z niego korzystać zarówno dzieci wybitnie zdolne, jak i posiadające trudności edukacyjne. Jest przeznaczony dla szerokiego spektrum odbiorców: od uczniów do rodziców.

Zalety EKOMATIKA-a zostały potwierdzone naukowo w ramach eksperymentu pedagogicznego, składającego się z etapu wstępnego (2020, 2021): przygotowanie narzędzi i jego standaryzacji oraz dwóch etapów właściwych: 2020/2021 ‑ eksperyment nr 1 oraz 2021/2022 ‑ eksperyment nr 2, w okresach od września do czerwca, co było podyktowane kalendarium roku szkolnego. W obydwu eksperymentach dokonano trzech pomiarów. Pomiar początkowy – wrzesień (2020, 2021), kontrolny – luty (2021, 2022) i końcowy – czerwiec (2021, 2022). Eksperyment polegał na prowadzeniu zajęć z wykorzystaniem zestawu EKOMATIK w 5 grupach eksperymentalnych (5 wczesnoszkolnych) podczas regularnych zajęć (3 godziny lekcyjne w każdym tygodniu, zgodnie z harmonogramem roku szkolnego), rozpoczynał się we wrześniu i trwał dwa semestry roku szkolnego (I faza – semestr zimowy 5 miesięcy: wrzesień – styczeń; II faza – semestr letni 5 miesięcy: luty – czerwiec). W trakcie eksperymentu prowadzono regularną dokumentację jego przebiegu. Narzędziem, które posłużyło do sprawdzenia efektów eksperymentu był test kompetencji matematycznych i społecznych wystandaryzowany podczas etapu pierwszego. Aby móc określić efektywność EKOMATIK-a, zastosowano technikę grup równoległych, polegającą na prowadzeniu zajęć i pomiarów w grupach eksperymentalnych i zestawieniu wyników, w których został dokonany wyłącznie pomiar kompetencji, nie prowadzono natomiast zajęć z wykorzystaniem zestawu EKOMATIK (grupy były zbieżne, np. dwie klasy z tego samego poziomu z tej samej szkoły o podobnej liczbie uczniów). W celu weryfikacji postawionej hipotezy, że w grupach, w których prowadzone są zajęcia z wykorzystaniem zestawu EKOMATIK, przyrost kompetencji jest wyższy od przyrostu kompetencji w grupach, w których zestaw nie był stosowany, przeprowadzono test kompetencji. Założono, że przyrost kompetencji w eksperymencie nr 1 osiągnie parametr minimum 4% więcej w grupie eksperymentalnej niż w grupie kontrolnej na etapie edukacji wczesnoszkolnej.

W pierwszej fazie została dokonana druga standaryzacja testów do badania kompetencji matematycznych i społecznych dzieci w wieku wczesnoszkolnym, która została przeprowadzona w pięciu szkołach w powiecie cieszyńskim. Eksperyment nr 1 wykazał efektywność pomocy w kształtowaniu kompetencji matematycznych i społecznych. Przyrost kompetencji był o 6% wyższy w grupach eksperymentalnych, w których wykorzystywano zestaw EKOMATIK w stosunku do grup kontrolnych, gdzie nie wykorzystywano tej pomocy w pracy z dziećmi w eksperymencie nr 1. Eksperyment nr 2 wykazał wyższy przyrost kompetencji zarówno w stosunku do grup kontrolnych, jak również w odniesieniu do eksperymentu nr 1 i wynosił 15%, co stanowiło 11% więcej w stosunku do grupy kontrolnej oraz 7% w stosunku do wyniku z eksperymentu nr 1. Może to świadczyć o zmianach w kierunku optymalizacji produktu dzięki sugestiom nauczycielek, które w raportach, dyskusjach fokusowych zwracały uwagę na elementy, które się sprawdzają oraz takie, które należałoby poprawić, uwzględnić lub odrzucić. Dzięki proponowanym zmianom, które zostały wprowadzone, zmodyfikowany EKOMATIK podniósł efektywność kształtowania kompetencji matematycznych, programistycznych i społecznych w eksperymencie nr 2.

BIBLIOGRAFIA

Gruszczyk-Kolczyńska, E., Skura, M. (2006). *Skarbiec matematyczny. Poradnik metodyczny, klasa 0 i klasy I–III*. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Gruszczyk-Kolczyńska, E. (2014). *Edukacja matematyczna w klasie I. Książka dla nauczycieli i rodziców*. Kraków: CEBP 24.

Gruszczyk-Kolczyńska, E., Kozieł, J. (2017). *Zastosowanie Darów Froebla w dziecięcej matematyce*. Lublin: Froebel.pl

Gruszczyk-Kolczyńska, E. *Zadania tekstowe* (w druku).

Kąkol, H. (1991). Problemowe nauczanie matematyki a komputer. *Matematyka, 2*.

Krygowska, Z. (1977). *Zarys dydaktyki matematyki*. Warszawa: WSiP.

Mitas, A. W. (red.) (2016). *System komplementarnego nauczania algorytmiki w aspekcie myślenia komutacyjnego*. Goleszów: Innowacje.

Podstawaprogramowa.pl/files/D2017000035601.pdf

Sysło, M. M. (2018). Jak myśleć komputacyjnie. *Informatyka w Edukacji*, *15*.

Sysło, M. M., Kwiatkowska, A. B. (2015). *Informatyka dla najmłodszych. Pojęcia, algorytmy, programy*. UMK w Toruniu: Wydział Matematyki i Informatyki.

Opowiadanie matematyczne jako propozycja nauki analizowania tekstu matematycznego od pierwszej klasy nauczania wczesnoszkolnego

Ewa Swoboda

Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna Jarosław
ewa.swoboda@pwste.edu.pl
ORCID: 0000-0002-9563-158X

Streszczenie

Powszechnie uważa się, że pierwszym tekstem matematycznym, z którym dziecko zapoznaje się w nauczaniu wczesnoszkolnym, to tekst zadania tekstowego. Pierwsze zadania tekstowe są jednak na ogół tak sformułowane, że nie prowokują do głębokiej analizy, nie motywują do krytycznego myślenia matematycznego. Nie uczą tego, co jest najtrudniejsze – wielokrotnego wracania do tekstu, wybierania i czytania fragmentów, samodzielnego interpretowania, zastanawiania się nad podanymi wielkościami (i ich pełnością dla rozwiązania podanego problemu), reprezentowania przypadków szczególnych. Chcemy na te fakty wyczulać, bazując w podręcznikach serii *Wielka Przygoda* na tekstach nazwanych „opowiadaniami matematycznymi". Żywimy przekonanie, że jest to propozycja, która od początku nauki pozwoli każdemu dziecku, także temu, który ma większe trudności, na pracę na własnym poziomie, z poczuciem sukcesu, poprzez formę zabawową. Nauczyciel może modyfikować pracę z takim tekstem zgodnie z możliwościami i potrzebami swoich uczniów.

Summary

It is commonly believed that the first math text, with which a child meets in early childhood education, is the text of the word problem. However, the first word problems are usually formulated in such a way that they do not provoke deep analysis or motivate to critical mathematical thinking. They do not teach what is the most difficult: repeatedly returning to the text, selecting and reading fragments, interpreting independently, reflecting on the given data (and their completeness to solve a given problem), representing special cases. We want to be sensitive to these facts, basing in the textbooks of the *Wielka Przygoda* series, on texts

called “mathematical stories”. We are convinced that this is a proposal that will allow every child, including those who have more difficulties, to work at their own level with a sense of success, through a form of play, from the very beginning of their learning. The teacher can modify the work with such text in accordance with the possibilities and needs of their students.

KORZYSTANIE Z PODRĘCZNIKÓW MATEMATYCZNYCH PRZY UCZENIU SIĘ MATEMATYKI

Można postawić pytanie, na ile uczniowi współczesnej szkoły potrzebny jest podręcznik? Znane są przykłady mówiące o tym, że nawet nauczyciele stwierdzają, że uczniowi wystarczy dobry zbiór zadań, a resztę wiedzy matematycznej uzyskają podczas lekcji w szkole. Na dodatek jest tajemnicą poliszynela, że uczeń częściej próbuje uzupełnić niedobór swojej wiedzy, surfując po internecie, niż sięgając po podręcznik:

> Szczególny status podręczników do matematyki dla szkół podstawowych i gimnazjów determinuje konieczność wykorzystywania ich w sposób naukowy i efektywny. Jednak, zarówno z badań prowadzonych przez nauczycieli, jak i na podstawie przeglądu literatury można stwierdzić, że podręcznikom do matematyki w szkołach podstawowych i średnich nie poświęca się wystarczającej uwagi, a poziom wykorzystania podręczników do matematyki nie jest wysoki. Ma na to wpływ internet oraz inne czynniki[1]. (Mo, Zhou, 2019, s. 194)

Co wiemy o specyfice czytania tekstu matematycznego?

Nawet pobieżne spojrzenie na tekst matematyczny utwierdza w przekonaniu, że jego czytanie ze zrozumieniem wymaga specjalnych umiejętności. „Czytanie i rozumienie tekstu matematycznego wymaga pewnego rodzaju umiejętności czytania, która jest częścią zdolności matematycznej, którą dane zadanie ma ocenić”[2].

---

[1] The special status of mathematics textbooks for elementary and middle schools determines the importance of using mathematics textbooks scientifically and effectively. However, through front-line teaching research and literature review, it is found that due to the influence of the Internet and other factors, the mathematics textbooks of primary and secondary school have not been paid enough attention and the use level of mathematics textbooks is not high (własne tłumaczenie z języka angielskiego.)

[2] Reading and understanding a mathematical text requires a certain kind of reading ability that is part of the mathematical ability that a mathematics task intends to assess (Theens, Frithjof, 2019, s.1803).

Potwierdzają to badania prowadzone nie tylko w Polsce. Trudności w korzystaniu z tekstu matematycznego są spowodowane wieloma faktami. Jednym z nich jest konieczność posługiwania się specjalnym słownictwem. Istotne jest, że istnieją cechy typowe dla tekstów matematycznych, takie jak specjalne słowa matematyczne (np. różniczkowanie); słowa, które mają inne znaczenie w kontekście matematycznym niż w języku potocznym (np. produkt = iloczyn [a nie produkt = wytwór, komentarz E. S.] lub użycie liczb i wzorów)[3] (Theens, 2019, s. 1803). Jednak zasadniczy problem tkwi nie w konieczności posługiwania się odpowiednimi pojęciami, ani w tym, że rozumienie tekstu zakłada posiadanie jakiejś innej, wstępnej wiedzy. Sam proces czytania tekstu matematycznego odbiega od tego, co na ogół kojarzy się z procedurą „czytania ze zrozumieniem".

Wiadomo, że czytanie tekstów matematycznych na ogół nie przebiega liniowo. Typowym zachowaniem dostatecznie obytego czytelnika są odniesienia, tj. pojedyncze kroki, lokalne ruchy oraz dłuższe powroty do różnych wcześniejszych miejsc tekstu, które on wykonuje jako pomocne lub konieczne do realizacji rozmaitych bieżących lub globalnych celów. Działania te są motywowane i uruchamiane przez różne momenty i okoliczności czytelniczego studium, a także przez komponenty samego tekstu. Proces czytania w warstwie tych rozmaitych odniesień realizuje się więc przestrzennie, tj. rozwija na tle architektury druku, wykraczając poza zwykłe uszeregowanie wyrażeń i łamiąc zwyczajowe współistnienie dwóch tradycyjnych kierunków progresji: z lewej na prawo i z góry w dół (Konior, 2000). Dodatkowo Konior podkreśla, że „nie jest to zjawisko powszechnie znane w tej formie poza matematyką".

Wnioski z tych analiz są więc następujące:

- Czytanie ze zrozumieniem tekstów matematycznych przebiega inaczej niż tekstów literackich. Jednym z czynników, które wpływają na trudności w zrozumieniu tekstu matematycznego, jest specyficzne słownictwo i posługiwanie się matematyczną symboliką. Nie jest to jednak jedyna trudność związana z czytaniem takiego tekstu.
- Tekst matematyczny ma swoją własną strukturę, wymagającą zauważania związków między różnymi fragmentami tekstu. Autorzy tekstu matematycznego wielokrotnie sami zwracają na to uwagę (wstawiając odpowiednie wskazówki).

---

[3] It is therefore relevant that there exist features that are typical for mathematics texts, like special mathematical words (e.g., differentiate), words that have a different meaning in mathematical context than in everyday language (e.g., product), or the use of numbers and formulas (see, e.g., Schleppegrell, 2007) (Theens, 2019, s. 1803).

- Osoba czytająca tekst matematyczny musi wielokrotnie wzbogacać sugerowaną nawigację, zgodnie z własnym sposobem odczytania tekstu.
- W procesie nauczania matematyki trzeba zwrócić uwagę na umiejętność korzystania z tekstów matematycznych.

Praca z matematycznym tekstem w nauczaniu wczesnoszkolnym

Jakie teksty matematyczne spotyka dziecko w nauczaniu wczesnoszkolnym? Dla nikogo chyba nie będzie zaskoczeniem stwierdzenie, że te teksty to tzw. zadania tekstowe. Istnieje bardzo szeroka metodyka wskazująca, w jaki sposób pracować z dzieckiem nad zadaniem tekstowym. Ta metodyka jest na ogół dość dobrze znana nauczycielom, dzięki niej potrafią oni przeprowadzić swoich uczniów przez umiejętność przeczytania zadania, zanalizowania, znalezienia związków, znalezienia strategii rozwiązującej, zapisania odpowiednich obliczeń, udzielenia odpowiedzi. Tego na ogół się oczekuje od uczniów w zakresie „rozwiązywanie zadań tekstowych".

Popatrzmy na ten sam problem od strony umiejętności pracy nad samym tekstem. I tutaj wielokrotnie widać „ukłon w stronę ucznia", świadomość jego ograniczeń. Pokazuje to poniższy rysunek:

Rycina 1. Przykład sformułowania zadania tekstowego dla dzieci z klasy 1

Źródło: Sawicka, Swoboda. 2020b, s. 30.

Jest to zadanie z podręcznika dla uczniów klasy 1, z początkowych miesięcy ich nauki w szkole. Tekst jest krótki, słowa trudniejsze są zastąpione rysunkiem, który na dodatek podkreśla związki liczbowe, ważne dla rozwiązania postawionego zadania.

Czasami pojawiają się teksty zadań, które są wsparte obrazkiem prowokującym do wykonywania różnych czynności. Wtedy tekst i rysunek tworzą integralną całość, wspierającą się nawzajem. Te czynności odwołują się do działań arytmetycznych będących ich symboliczną reprezentacją prowadzącą do znalezienia rozwiązania. Sam rysunek prowokuje do wykonania czynności, a tekst słownie opisuję tę czynność i w jednoznaczny sposób odwołuje do matematycznej interpretacji rysunku.

Rycina 2. Czynnościowa prezentacja działania matematycznego prowadzącego do rozwiązania zadania

Źródło: Sawicka, Swoboda, 2020, s. 111.

Zdanie zaprezentowane w takiej formie zmusza do zrozumienia sytuacji (globalnego spojrzenia), do znalezienia matematycznego kodu i zapisania jej za pomocą symboliki matematycznej. Są zadania (problemy do rozwiązania), w których użyteczne informacje są podawane zarówno w tekście, jak i na rysunku, i wtedy obydwa źródła informacji są jednakowo ważne. Na ogół jednak wiadomo, jak te informacje interpretować. Tak jak poniżej:

Rycina 3. Przykład zadania, w którym tekst jest wsparty rysunkiem

Źródło: Sawicka, Swoboda 2020a, s. 113.

Czy bywają sytuacje, kiedy uczeń spotyka się w podręczniku z tekstem w innej sytuacji niż tekst zadania tekstowego? Oczywiście, że tak. Często jest to wprowadzenie do kształtowania określonego pojęcia matematycznego. Niezależnie od tego, że samo pojęcie jako takie jest abstrakcyjne, musi być uczniowi w jakiś sposób reprezentowane. Wtedy często tekst (mówimy o podręczniku, a nie o innego typu aktywnościach związanych z kształtowaniem pojęcia) jest nieco schowany za reprezentacją = ilustracją. Jest tak na ogół wtedy, kiedy uczeń jeszcze sam nie potrafi tekstu przeczytać, dlatego słucha tylko tekstu czytanego przez nauczyciela, i ten tekst konfrontuje z obrazkiem. Tak jak na poniższym przykładzie, dotyczącym kształtowania jednego z aspektów liczby 5:

Rycina 4. Reprezentacja rozkładu liczby 5 na składniki

Źródło: Sawicka, Swoboda 2020a, s.106.

Czym się takie teksty charakteryzują?:
- są krótkie (co ułatwia zapamiętanie wszystkich podanych tam informacji),
- są jednoznaczne (na ogół nie prowokują do różnorodnych interpretacji),
- w jednoznaczny sposób wskazują na związki z matematyką i zagadnieniami aktualnie omawianymi podczas zajęć, sugerowanymi programem szkolnym,
- zawierają jedynie niezbędne informacje,
- są wspierane innymi reprezentacjami (rysunkiem), w czytelny sposób nawiązującym do problemu przedstawionego w tekście.

Aby przygotować dziecko do umiejętności korzystania z tekstu matematycznego, jest to za mało. Czym się bowiem charakteryzują te teksty, analizowane z punktu widzenia ich braków? Otóż:
- Nie prowokują do wielokrotnych powrotów do czytania, do wyszukiwania tych informacji, które w danym momencie trzeba odtworzyć albo przywołać, które są bazą do dalszych etapów myślenia nad problemem.
- Nie zawierają zbędnych danych, ani takich danych, które są potrzebne na różnych etapach rozumienia. Wszystko co jest potrzebne do całościowego spojrzenia na problem, jest ewidentne, co jest pewnego rodzaju podpowiedzią narzucającą szukanie związków między tymi właśnie danymi.

- Nie zmuszają do wyboru tych informacji, które w *danym* momencie są potrzebne, czyli nie zmuszają do selektywnego operowania informacjami.
- Nie dopuszczają dowolności interpretacji, czyli do tworzenia własnych indywidualnych powiązań z posiadaną siecią kognitywną, a co za tym idzie – nie prowokują do argumentacji, do ustalenia wspólnego (lub własnego) punktu widzenia.
- Nie prowokują w sposób naturalny do kodowania zawartych tam informacji (a co za tym idzie, do tworzenia swoich własnych sposobów kodowania ani do takiego przetwarzania informacji, który jest związany z używaniem różnych kodów, w tym rysunkowych).

Postawmy więc pytanie, czy te braki w jakiś sposób ograniczają matematyczne umiejętności? W świetle całej wiedzy o tym, jakie są umiejętności potrzebne do korzystania z tekstu matematycznego, trzeba powiedzieć, że tak. Badania dydaktyczne dowodzą, że umiejętność czytania tekstu matematycznego jest trudna. Więc im prędzej zaczniemy świadomie działać w kierunku ćwiczenia dzieci w tej umiejętności, tym chyba lepiej. Jednak niezależnie od samego logicznego układu treści, podręcznikowe rozwiązania powinny brać pod uwagę również możliwości percepcyjne uczniów. Jest to bowiem podstawowa cecha każdego podręcznika, to że jest on dostosowany do wieku odbiorcy. Podręczniki dla szkół podstawowych i gimnazjalnych przedstawiają wyselekcjonowaną i podstawową wiedzę matematyczną, a system strukturalny został ułożony zgodnie z logicznym porządkiem matematyki, zasadami wychowania oraz etapami rozwoju fizycznego i psychicznego uczniów, tworząc organiczną całość[4] (Mo, Zhou, 2019).

W tym materiale zaprezentujemy jedną z takich pozycji kierowanej do uczniów klas początkowych. Będą to odpowiednio konstruowanie teksty, nazwane przez autorki „opowiadaniami matematycznymi".

Co to jest „opowiadanie matematyczne"

Zamiast definicji zobaczmy przykład, który pojawia się w podręczniku niemal na samym początku roku szkolnego i może być wykorzystany na zajęciach już we wrześniu.

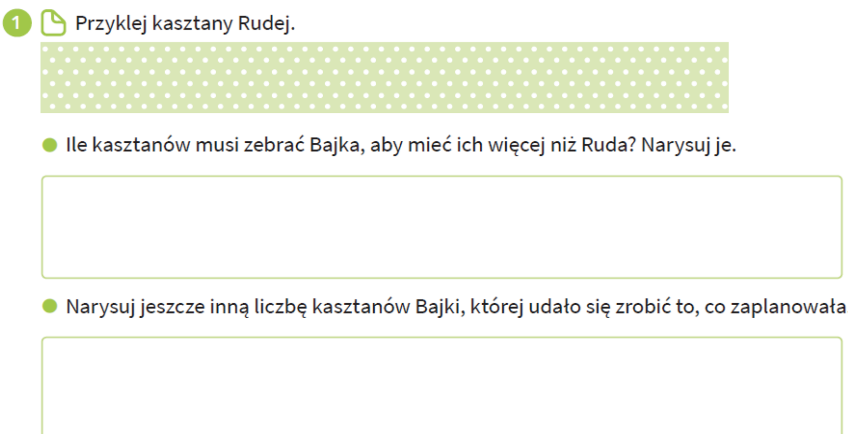
---

[4] The mathematics textbooks of primary and secondary schools select the core and basic knowledge of mathematics, and a structural system was arranged according to the logical order of mathematics, the rules of education and the law of physical and mental development of students, which is an organic whole and has a strong system.

Rycina 5. Strona z podręcznika dla uczniów klasy I, prezentująca *Opowiadanie matematyczne*

Źródło: Sawicka, Swoboda, 2020a, s. 98.

Jakie możliwości stwarza praca nad takim tekstem? Zacznijmy od próby wyobrażenia sobie, w jaki sposób można w klasie I, na początku roku szkolnego, pracować z tą propozycją. Sam tekst jest za trudny, aby oczekiwać, że dzieci same go przeczytają. Nauczycielka przed przeczytaniem tego tekstu może poprosić o skupienie się, śledzenie tekstu równocześnie z patrzeniem na obrazek, zaznaczając, że będziemy za chwilę rozmawiać o tym, co dzieci zapamiętały. Zauważmy, że nie stawiamy jeszcze żadnego problemu – nie ma pytania, które ukierunkowuje sposób słuchania tekstu. Zamieszczone pod tekstem pytanie jest bardzo ogólne: opowiedz, co się działo u wiewiórek. Być może podczas rozmów dzieci pojawią się tematy, które wcale nie są związane z matematyzacją, a które wynikną z własnych skojarzeń z samą tematyką „parkową” czy z rysunkiem. Można wtedy spytać, skąd to wiesz; czy o tym była mowa w tekście? Da to okazję do bardzo delikatnego kształtowania „krytycyzmu myślenia" – koncentrujemy się jedynie na tych elementach, które zostały przedstawione w tekście, dbając o to, aby nasza reakcja nie zniechęcała dzieci do mówienia w ogóle. Natłok informacji powoduje, że nie bardzo wiadomo, co trzeba zapamiętać. Dopiero sformułowanie problemu uświadamia, że trzeba wyszukać odpowiednie dane, czyli wrócić do tekstu, aby te dane z niego wyłuskać. Drugie pytanie „o co można zapytać", może prowokować dzieci do samodzielnego budowania problemów, z wykorzystaniem informacji zarysowanych w opowiadaniu. Uważamy, że jest to ważne zagadnienie – uczenie umiejętności dostrzegania i formułowania problemów, które można rozwiązywać matematycznymi metodami. Ponieważ opowiadanie opowiadało o wiewiórkach, które zbierały kasztany, wydaje się naturalne, że dzieci będą starały się budować pytania związane z tą sytuacją. Zbieranie kasztanów, liczby tam występujące wymagają przypomnienia, i to jest naturalna okazja, aby wyszukiwać interesujące fragmenty tekstu. Mając świadomość, że jest to początek nauki, trochę staramy się podprowadzić pod matematyczną interpretację. Pokazujemy, że dla niektórych pytań poszukujemy odpowiedzi w odpowiednio wyszukanym fragmencie tekstu, że czasami warto coś zanotować (narysować, przykleić, zaprezentować za pomocą żetonów). Pokazujemy, że niektóre informacje trzeba sobie zapisać „po swojemu", jak choćby informacja o tym, ile kasztanów zebrała Ruda (w tekście tej informacji nie ma, jest rysunek z kasztanami ułożonymi „w trójkąt"). Pomocne mogą być przy tym strony odpowiednio przygotowanego zeszytu ćwiczeń, pozwalające dzieciom na własne rozwiązania, ale wciąż otwarte, związane choćby z problemem – ile to jest „więcej niż 9" (rycina 6).


1 Przyklej kasztany Rudej.

Ile kasztanów musi zebrać Bajka, aby mieć ich więcej niż Ruda? Narysuj je.

Narysuj jeszcze inną liczbę kasztanów Bajki, której udało się zrobić to, co zaplanowała.

Rycina 6. Propozycja z zeszytu ćwiczeń wspierająca pracę z tekstem opowiadania matematycznego zwartego w podręczniku

Źródło: Sawicka, Swoboda, 2020b, s. 24.

Podobne teksty pojawiają się w całej serii podręczników klas I–III, średnio 4 w ciągu roku. Ich objętość, stopień skomplikowania, sugerowane sposoby pracy są różne. Poruszamy w nich różne zagadnienia dotyczące korzystania z pisanej informacji, wokół której można budować różne matematyczne aktywności.

Jaki jest cel wprowadzania „opowiadań matematycznych” do nauczania wczesnoszkolnego?

- Szukamy naturalnej motywacji do tego, aby tekst analizować, wielokrotnie do niego wracać, dzielić na fragmenty, wspierać jego rozumienie poprzez własne sposoby kodowania informacji;
- Prowokujemy do dyskusji, do samodzielnego interpretowania zamieszczonych informacji;
- Uczymy samodzielnego i krytycznego odbioru informacji;
- Zachęcamy do dostrzegania matematycznych problemów.

Obserwacje – przykład pracy uczniów klas wczesnoszkolnych z tekstami zawartymi w *Opowiadaniach matematycznych*

Poniżej pokazuję przykład fragmentu zajęć z uczniami klasy II podczas pracy nad jednym z opowiadań zawartych w podręczniku. W spotkaniu zorganizowanym pod koniec wakacji uczestniczyła trójka chłopców: Kuba1 (K1), Kuba 2 (K2), Antoś (A). Chłopcy jeszcze nie rozpoczęli nauki w klasie II, jednak zdecydowałam się porozmawiać z nimi o opowiadaniu, które jest proponowane do pracy z uczniami w drugim semestrze tej klasy. Dla potrzeb badawczych każde dziecko dostało odbitkę strony z podręcznika, aby każdy mógł na niej zaznaczać wyszukiwane fragmenty.

W samym tekście jest już zawartych wiele danych, i te dane pozwalają na postawienie różnych zagadnień, które mogą być rozwiązywane za pomocą matematycznych narzędzi. Niektóre z tych danych trzeba odpowiednio zinterpretować. Na przykład: w barze przygotowano dla wycieczki 23 miejsca, ale ilu uczniów jedzie na wycieczkę? Jeżeli dzieci mogą wziąć udział w jednej z trzech dodatkowych atrakcji, to ilu uczniów będzie piekło chleb? (nie mamy informacji, że grupy muszą być równoliczne). Ale są pytania (np. takie, które zaproponowałyśmy pod tekstem), na które nie znajdziemy odpowiedzi w samym opowiadaniu. To opowiadanie oprócz wielu różnych dydaktycznych problemów w czytelny sposób wprowadza w zagadnienie modelowania matematycznego. To było świadome dodatkowe założenie autorek tekstu, aby dzieci starały się poszukać niektórych informacji (np. jakie mogą być ceny biletów) w dostępnych źródłach.

Opowiadanie matematyczne

Klasa IIc planuje wycieczkę do skansenu. Uczniowie będą oglądać zabytkowe domy z zagrodami, drewniany kościół, wiatrak i kuźnię. Wezmą też udział w zajęciach lepienia garnków, malowania na tkaninie i wypiekania chleba. Każda osoba może uczestniczyć w jednych, wybranych przez siebie, zajęciach.

Przed wycieczką pani powiedziała:

– Jutro o 8.00 będzie czekał na nas autokar. Pojedzie z nami mama Zosi. Podróż zajmie około godziny. Bilety dostaniecie na miejscu.

Maciek zapytał:

– A co z jedzeniem? Mamy zabrać kanapki?

– Nie, na obiad pójdziemy do baru, który jest blisko skansenu. Już przygotowano dla nas 23 miejsca. Z wycieczki powinniśmy wrócić o godzinie 15.00.

Ola zastanawiała się, ile może kosztować bilet do takiego skansenu, a Maciek ucieszył się, że nie musi szykować kanapek.

Rycina 7. Fragment strony z podręcznika dla klasy II (tekst i rysunek, bez umieszczonych pytań)

Źródło: Sawicka, Swoboda, 2021, s. 61.

Poniżej zaprezentuję wybrane fragmenty pracy z tekstem, wraz z komentarzami.

Fragment 1

Po wstępnej rozmowie (wytłumaczeniu, co to jest skansen…) przeczytałam opowiadanie, które chłopcy mieli również przed sobą. Potem spytałam, co zapamiętali.

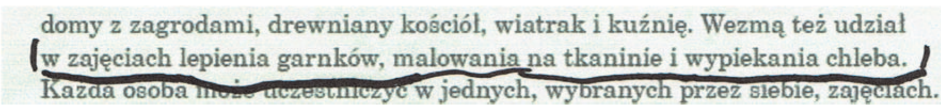
K1: *(zaczyna wyliczać atrakcje) – Lepienie…*

K2: *Że pójdą do baru i nie trzeba kanapek…*

Uczniowie mogą skupiać się na różnych fragmentach, nie zawsze takich, które są ważne z matematycznego punktu widzenia albo wokół których nauczyciel zaplanował pracę. Warto nie ograniczać ich inwencji, słuchając, trzeba jednak na żywo tworzyć scenariusz rozmowy, zastanawiać się, jak wykorzystać jak najwięcej z tych spontanicznych wypowiedzi. Trzeba jednak przy tym pamiętać, aby nie przedłużać czasu takich spontanicznych wypowiedzi – dzieci muszą mieć jeszcze energię, aby zająć się samą analizą tekstu.

Fragment 2

N: – *Kuba przypomniał, że dzieci będą uczestniczyć w różnych zajęciach. Potraficie znaleźć dokładnie tę informację?*
(szukają dość chaotycznie, trochę to trwa, ale w końcu znajdują, odczytują)


domy z zagrodami, drewniany kościół, wiatrak i kuźnię. Wezmą też udział
w zajęciach lepienia garnków, malowania na tkaninie i wypiekania chleba.
Każda osoba może uczestniczyć w jednych, wybranych przez siebie, zajęciach.

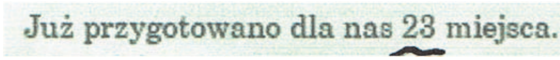
Rycina 8. Fragment tekstu znaleziony przez uczniów, mówiący o planowanych różnych aktywnościach

N: *Wiemy, że trzeba stworzyć trzy grupy. Jak te dzieci mogą się podzielić?*
K1: *Po pięć.*
N: *A czy my wiemy, ile tych dzieci było?*
(cisza, chłopcy patrzą w tekst i starają się sprawdzić, czy jest tam potrzebna informacja)

Trudno liczyć, że uczniowie spontanicznie będą tworzyć matematyczne problemy na podstawie danych z czytanki. W podręczniku są wprawdzie umieszczone sugerowane pytania, ale nauczyciel nie musi się nimi kierować podczas pracy nad tekstem. To, co może być głównym celem, to uczenie nawigowania po tekście, nie tylko „czytanie ze zrozumieniem", ale głównie poszukiwanie danych potrzebnych do rozwiązania postawionego problemu. Spontaniczna odpowiedź: „po pięć" była daleka od oczekiwanej. Można było pozwolić uczniom przeliczyć liczebność całej gromadki (3 × 5), ale pewnie zajęło by to trochę czasu i energii, której mogło potem zabraknąć na kontynuowanie pracy.

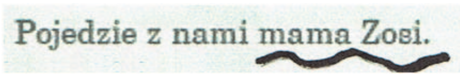
Fragment 3

K1: *Było ich 21.*
N: *A gdzie to jest napisane?*
K1: *Bo przygotowano 23 miejsca (pokazuje w tekście, pozostali chłopcy szukają tego na swoich kartkach). A jeszcze jest Pani i mama Zosi.*


Już przygotowano dla nas 23 miejsca.

Rycina 9. Znaleziony przez uczniów fragment mówiący o liczebności grupy

N: *Też to jest napisane?*
K1*: No tu, (pokazuje) pojedzie z nami mama Zosi.*


Pojedzie z nami mama Zosi.

Rycina 10. Znaleziona informacja o mamie Zosi

Kuba nie tylko znalazł liczbę uczestników wycieczki, ale i odpowiednio zinterpretował tę informację. Przyjął, że na wycieczkę pojechała tylko jedna Pani nauczycielka (chociaż w jego własnej szkole zajęcia prowadzą dwie panie: nauczycielka główna i wspomagająca), dodatkowo jest jeszcze jedna osoba dorosła – mama Zosi. Dlatego 23 miejsca w barze rozdzielił pomiędzy uczniów oraz dwie osoby dorosłe.

Fragment 4

Zauważam, że chłopcy nie mają pomysłu, jak wykorzystać informację, że na wycieczkę pojechało 21 uczniów. Jeszcze nie znają dzielenia, podpowiadam im, by wykorzystali flamastry jako liczmany, dla zobrazowania liczebności klasy. (chłopcy wspólnie odliczają flamastry i kładą na środek stołu)
N: *Ile tu mamy?*
K2: *21.*
N: *To jest nasza klasa. Klasa, która zwiedza skansen. I teraz pani mówi: słuchajcie, musimy zrobić grupki. Pomóżcie pani, jak to zrobić. Kuba miał jakiś pomysł.*
K1: *(odsuwa flamastry, tworząc oddzielne zbiory) Pięć pójdzie tu, pięć pójdzie tu, pięć pójdzie tu (na stole zostają jeszcze flamastry).*
N: *(wskazuje na pozostałe) No a te, to co?*
K1: *To teraz po dwa… (dosuwa do każdej kupki) … i jedno zostanie.*
N: *Jak to się stało, że jedno zostało?*
K1: *(zaczyna przeliczać rozdzielone do kupek flamastry) 1, 2, …, 7, 8, 9, 10, …, 20, 21.*
N: *(wskazuje na ten jeden leżący na środku) Oj, to jest chyba Pani! Bo dzieci jest 21.*

Uczniowie potrafili sobie poradzić w rozdziale na trzy zbiory równoliczne. Dodatkowo zweryfikowali zarówno swoje działanie, jak i „dane wyjściowe", dochodząc do wniosku, że sami źle przygotowali liczbę flamastrów reprezentującą liczebność klasy. Z satysfakcją stwierdzam, że na tym etapie pracy nie zastanawiają się, *gdzie* pójdzie dana grupa, ważne było dla nich, aby grupy zawierały taką samą liczbę dzieci. Nie próbują również drążyć zagadnienia „równoliczności", ani podkreślać, że tak naprawdę nie był to konieczny warunek.

Fragment 5

Aby stworzyć dalszą okazję do nawigacji po tekście, proponuję kolejne zagadnienie.

N: *A czy jeszcze tutaj o czymś można by było porozmawiać?… (cisza). Na przykład… bo tutaj jest jeszcze taka informacja: przed wycieczką Pani powiedziała: jutro o 8., będzie czekał na nas autobus – (chłopcy znajdują ten fragment w tekście). Pojedzie z nami mama Zosi. Podróż zajmie nam około godziny.*

K1: (wpada w słowo) *Bo tutaj jest to źle napisane. Powinno być napisane 24 osoby. To ktoś się pomylił, bo ktoś musi kierować!*

N: *Faktycznie! Musi być kierowca albo dwóch kierowców. Masz rację. To co teraz?*

A: *Ale kierowca nie jest uczestnikiem wycieczki.*

K2: *Bo dla Pani i dla tej drugiej pani były 23 miejsca przygotowane.*

N: *Więc może dla kierowcy było osobne miejsce, może on miał inne jedzenie. Ale to jest świetna uwaga, bardzo się cieszę, że takie rzeczy zauważyłeś.*

Ten fragment pokazuje, jak twórczy mogą być uczniowie i ile wartościowych momentów może się w klasie przydarzyć, kiedy nie działamy zgodnie z szablonem. Uwaga Kuby była bardzo życiowa. Na dodatek chłopczyk pokazał, że potrafi kojarzyć różne fragmenty informacji. Prawdopodobnie fragment tekstu o „mamie Zosi" został przez niego skojarzony z wcześniejszymi obliczeniami dotyczącymi liczebności grupy. Dało to okazję dla nas wszystkich do uściślenia danych, do uszczegółowienia podanych informacji albo do przedstawienia własnych argumentacji za przyjęciem takich, a nie innych danych. Niezależnie od tego, że intencją moją było skupienie uwagi na informacjach czasowych, uwaga Kuby była na tyle intrygująca, że nie można jej było zignorować.

Fragment 6

N: *Podróż zajmie około godziny. Jak wam się wydaje, jak można rozplanować ten czas, który uczniowie będą mieć w skansenie?*

K1: *Godzin – ile?*
N: *Czy coś jeszcze wiemy o tym czasie? Można gdzieś znaleźć jakieś informacje? Szukajcie…*
N: *A czy tutaj jest jeszcze jakaś inna informacja…, czy wiemy, ile ta wycieczka będzie trwała… Kuba, jak widzę, szuka, szuka… Znalazłeś coś? gdzie?*
K1: *Pięć godzin.*
N: *Ojej, a skąd to wiesz?*
K1: *No bo jak wyjechali o 8., podróż będzie trwała około godziny, to do 9., a potem jeszcze godzinę na powrót.*
N: *No bo muszą wrócić, prawda? A czy coś wiadomo, o której muszą wrócić?*
K2: *O 15.*
N: *A gdzie to jest napisane. Jest? Jest! (chłopcy zakreślają) Czyli, jak to Kuba policzyłeś?*


Już przygotowano
o godzinie 15.00.

Rycina 11. Informacja o godzinie powrotu, potrzebna do policzenia czasu przeznaczonego na pobyt w skansenie

K1: *Od 9. do 14., bo jeszcze godzina na powrót.*

Kuba samodzielnie organizuje pracę myślową związaną z postawionym przeze mnie problemem. Wyraźnie zakłada, że zamiast planować czas na kolejne aktywności, musi najpierw określić ramy czasowe. Koncentruje się na tym, ile czasu zajmie uczniom pobyt w skansenie (*godzin – ile?*), potem potrafi wyszukać odpowiednie informacje potrzebne do określenia ram czasowych wycieczki. Wykorzystuje je do wykonania odpowiednich obliczeń. Koledzy korzystają z jego podpowiedzi i też znajdują odpowiednie informacje we własnych tekstach. Opisane fragmenty zajęły około 15 minut pracy. Wydaje się, że jest to taki odcinek czasowy, w jakim uczniowie klasy II są w stanie się skupić i nawigować po tekście. Chłopcy, z którymi rozmawiałam, potrafili to zrobić.

PODSUMOWANIE

Opowiadanie matematyczne nie jest tekstem matematycznym. Uczeń nie ma w nim narzuconej logicznej struktury, dla zrozumienia opisywanej tematyki nie musi sam wyszukiwać odpowiednich fragmentów, przy pobieżnym czytaniu może nie być zmuszony do odpowiedniego nawigowania, do powrotów. Niezależnie od tego można tak zorganizować pracę w klasie, aby wystąpiły te elementy, które wprowadzają w umiejętność posługiwania się tekstem matematycznym.

Edukacja matematyczna w przedszkolu i klasach początkowych powinna być traktowana jako niezwykle ważna baza, przygotowująca uczniów do *wszelkiego rodzaju* aktywności matematycznych. Błędem jest myślenie, że na tym poziomie edukacyjnym wystarczy wprowadzenie w umiejętność wykonywania czterech podstawowych działań na liczbach naturalnych oraz zapoznanie z podstawowymi kształtami geometrycznymi. To tak, jakby nauka gry na skrzypcach w pierwszych latach ograniczyła się do czytania nut i wydobywania dźwięków, zupełnie ignorując zachowanie prawidłowej postawy czy odpowiedniego interpretowania odtwarzanego utworu. Wśród rozpoznanych problemów dydaktycznych, dotyczących matematycznego kształcenia w ogóle, nie ma niczego, na co nie warto wyczulać dzieci od samego początku ich szkolnej nauki. Warto, aby ten fakt przeniknął do świadomości nie tylko badaczy, ale przede wszystkim był brany pod uwagę podczas codziennej szkolnej praktyki. Dbanie o to nakłada obowiązek zarówno na badaczy, autorów podręczników, jak i edukatorów oraz nauczycieli.

BIBLIOGRAFIA

Konior, J. (2000). Nawigacja po tekście matematycznym i jego strukturyzacja podczas lektury (w świetle badań wśród uczniów szkoły średniej). *Didactica Mathematicae*, *22*(1), 75‒107.

Mo, Z. i Zhou, Y. (2019). Strategies for the Use of Mathematics Textbooks for Primary and Secondary Schools under the Background of “Internet+”. *Open Journal of Social Sciences*, *7*, 197‒204.

Morgan, C. (2013). Understanding practices in mathematics education: structure and text. *Educational Studies in Mathematics*, 128‒144.

Schleppegrell, M. J. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading & Writing Quarterly*, *23*(2), 139–159.

Theens, F. (2019). Variations in students’ reading process when working on mathematics tasks with high demand of reading ability. W: U. Th. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis (red.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1802–1810). Umea: Uniwersity w Umea.

Sawicka, K. i Swoboda, E. (2020a). *Wielka Przygoda. Podręcznik, edukacja matematyczna*, kl. 1, cz. 1. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Sawicka, K. i Swoboda, E. (2020b). *Wielka Przygoda. Ćwiczenia, edukacja matematyczna*, kl. 1, cz. 1. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

Sawicka, K. i Swoboda, E. (2021). *Wielka Przygoda. Podręcznik, edukacja matematyczna*, kl. 2, cz. 2. Warszawa: Wydawnictwo Nowa Era.

ISBN 978-83-232-4213-0 (PDF)
ISBN 978-83-232-4212-3 (Print)